【Example 2.1】

xy 平面における直線

$$\mathfrak{L}_t : y = 2tx - t^2 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) t が実数全体を動くとき，$\mathfrak{L}_t$ が通過する領域を図示せよ．

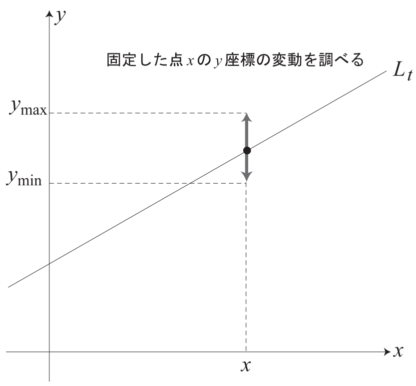
(2) t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき，$\mathfrak{L}_t$ が通過する領域を図示せよ．

【解説】

(1) $\mathfrak{L}_t$ 上の点 x を固定して，t の変化に伴う y 座標の変動を調べる．

(1.1) より，

$$y = 2tx - t^2 = -(t-x)^2 + x^2 \overset{\text{put}}{=} y(t) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$



(1.2) において，x を定数として t を変化させると，

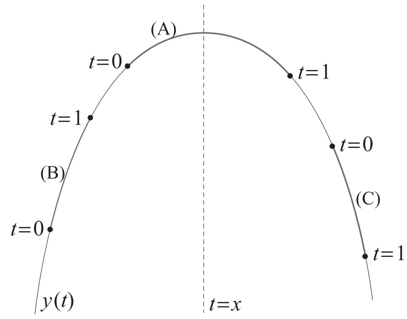
$$y = y(t) \leq x^2 \qquad \therefore\ y \leq x^2 \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.3) を xy 平面に図示して**下図 (左)** を得る．

(2) $0 \leq t \leq 1$ における $y(t)$ のとり得る値の範囲を調べる．

(A) $0 \leq x \leq 1$ の場合;

$$\min(y(0),\, y(1)) \leq y(t) \leq y(x)$$
$$\iff \min(0,\, 2x-1) \leq y \leq x^2 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$



(B) $1 \leq x$ の場合;

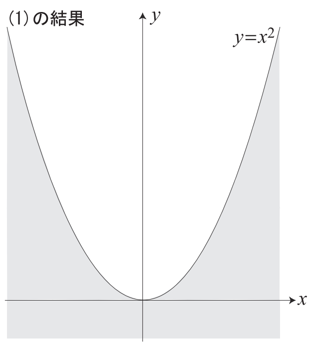
$$y(0) \leq y(t) \leq y(1) \iff 0 \leq y \leq 2x-1 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

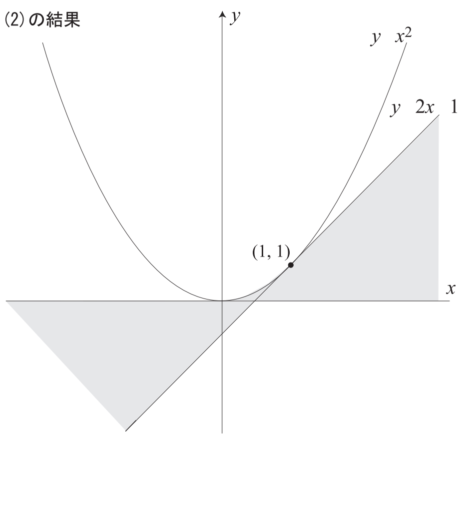
(C) $x \leq 0$ の場合;

$$y(1) \leq y(t) \leq y(0) \iff 2x-1 \leq y \leq 0 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.4), (1.5), (1.6) を xy 平面に図示して**下図 (右)** を得る．

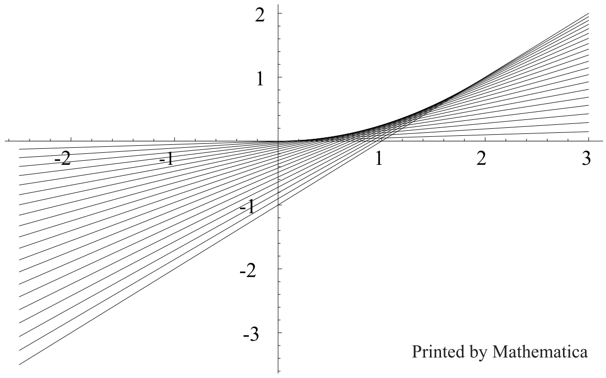
[Note] $\mathfrak{L}_t$ の通過領域の境界である放物線 $y = x^2$ を**包絡線**という．即ち，包絡線とは各点 x における関数 $y(t)$ の極値の集合である．





Point

1. 図形 $F(x, y, t) = 0$ 上の点 x の y 座標を t の関数 $y(t)$ と考えて，$y(t)$ のとり得る値の範囲を調べる．
2. 図形 $F(x, y, t) = 0$ を t の方程式とみて，t の存在範囲 $a \leq t \leq b$ に実数解を持つ x, y の条件を調べる．
3. 図形 $F(x, y, t) = 0$ の $a \leq t \leq b$ に対応する**包絡線**の方程式を求めて，図形的，直観的に領域を調べる．



【Review 2.1.1】

実数 t が $t > 0$ の範囲を動くとき，

$$\mathrm{P}(0, -t), \quad \mathrm{Q}(t,\ t^3 - t)$$

なる 2 点によって定まる線分 PQ の通過領域を図示せよ．

[答] 図略

【Review 2.1.2】　90 東大

xy 平面上の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \ \mathrm{A}(2,\ 0),\ \ \mathrm{B}(2,\ 2),\ \ \mathrm{C}(0,\ 2)$$

を頂点とする正方形を Q とする．

次の条件を満たす xy 平面上の点 P の存在範囲を図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

[**条件**] 点 P を通り，Q の面積 4 を 1 : 3 に分けるような直線を引くことができない

[答] 図略，面積 : $2 - 2\log_e 2$

【Example 2.2】

3 次曲線 $y = x^3 - 3x$ と点 $(2, -1)$ を通る直線が 3 点で交わり，更に，2 図形の囲む 2 つの領域の面積が等しいとき，この直線の方程式を求めよ．

【解説】

点 $(2, -1)$ を通る直線 $y = m(x-2) - 1$ と曲線 $y = x^3 - 3x$ が,

$$\begin{cases} \text{異なる共有点を 3 個持つ} & \cdots\cdots(2.1) \\ \text{2 図形の囲む面積が等しい} & \cdots\cdots(2.2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^3 - 3x = m(x-2) - 1 \text{ の異なる実数解が 3 個} & \cdots\cdots(2.1) \\ (\text{2 図形の囲む面積を } S_1,\ S_2 \text{として,})\ S_1 = S_2 & \cdots\cdots(2.2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^3 - (3+m)x + 2m + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ (\alpha < \beta < \gamma) & \cdots\cdots(2.1) \\ \displaystyle\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,\mathbf{d}x = 0 & \cdots\cdots(2.2) \end{cases}$$

このとき，(2.1) に関して,

$$(2.1) \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \cdots\cdots(2.3) \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -(3+m) & \cdots\cdots(2.4) \\ \alpha\beta\gamma = -2m - 1 & \cdots\cdots(2.5) \end{cases}$$

更に，(2.2) に関して,

$$(2.2) \iff \frac{1}{12}(\gamma - \alpha)^3(2\beta - \alpha - \gamma) = 0 \iff \alpha + \gamma = 2\beta\ \ (\because\ \alpha \neq \gamma) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.3), (2.6) より,

$$\alpha + \gamma = \beta = 0 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.7), (2.5) より,

$$-2m - 1 = 0 \qquad \therefore\ m = -\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.8), (2.4) より,

$$\gamma\alpha = -\frac{5}{2}\ \ (\wedge\ \alpha + \gamma = 0) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

以上より,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(-\sqrt{5/2},\ 0,\ \sqrt{5/2}\right)\ \wedge\ m = -\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

Comment

接点，交点を α, β, γ と設定し，解と係数の関係に持ちこむ流れをマスターして貰いたい．
これは整関数の微分積分に特有の手法である．何故なら，**整関数以外では因数分解ができない**からである．

【別解】 (対称性を利用)

3 次関数 $y = x^3 - 3x$ は奇関数なので原点対称である．
従って, 点 $(2, -1)$ を通る直線が原点を通過すればよく，求める直線は,

$$y = -\frac{1}{2}x \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

[Note] 一般の 3 次関数についても，その対称中心を求めて**瞬時に**解くことができる！

Comment

[**解説**] の $S_1 = S_2$ の部分の計算を詳しく書くと，

$$S_1 = S_2 \iff \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,\mathbf{d}x = -\int_\beta^\gamma (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,\mathbf{d}x$$
$$\iff \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,\mathbf{d}x + \int_\beta^\gamma (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,\mathbf{d}x = 0$$
$$\iff \int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,\mathbf{d}x = 0 \iff \frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3(2\beta-\alpha-\gamma) = 0$$

[Note]　積分公式

$$\int_a^c (x-a)(x-b)(x-c)\,\mathbf{d}x = \frac{1}{12}(c-a)^3(2b-a-c)$$

を導け．(**結果を記憶する必要はない**)

【Review 2.2.1】　2005 摂南大

曲線 $y = x(x-a)^2$ $(a > 0)$ と直線 $y = x$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき，a の値を求めよ．

[答] $a = 3$

【Review 2.2.2】　90 名古屋市大

$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$, $g(x) = a(x^2 + x)$ $(a > 0)$ とする．
2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの領域の面積が等しくなるとき，定数 a の値を求めよ．

[答] $a = 1$

【Review 2.2.3】　96 法政大

a を定数とし，$y = x(x-1)^3$, $y = ax(x-1)^2$ のグラフをそれぞれ $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ とする．
$-1 < a < 0$ のとき，$\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ に囲まれる 2 つの領域の面積を等しくするような a の値を求めよ．

[答] $a = -\dfrac{3}{5}$

【Example 2.3】
点 A$(2, a)$ から曲線 $y = x^3$ に接線は何本引けるか．a の値で分類して調べよ．

【解説】

曲線上の点 $(t,\ t^3)$ における接線は,

$$y = 3t^2(x-t)+t^3 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

これが点 A$(2, a)$ を通るとき,

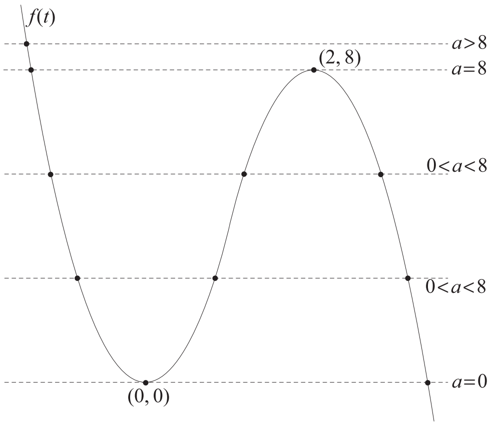
$$a = -2t^3+6t^2 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

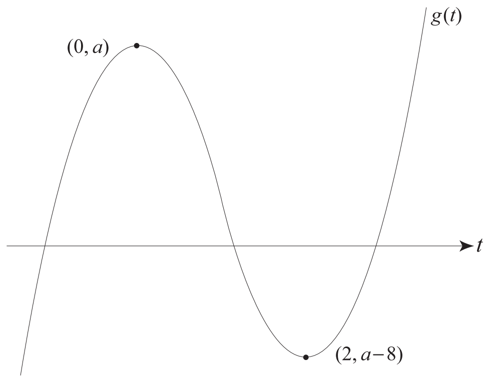
(3.2) の異なる実数解 t の個数が接線の本数と一致するので,

$$f(t) = -2t^3+6t^2 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

として, (3.3) のグラフ (**右上図**) より,

$$\begin{cases} a<0 \vee 8<a & \cdots\cdots 1\text{ 本} \\ a=0 \vee a=8 & \cdots\cdots 2\text{ 本} \\ 0<a<8 & \cdots\cdots 3\text{ 本} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$





【別解】

$$(3.2) \iff 2t^3-6t^2+a=0 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) の左辺を $g(t)$ と置けば,
$g'(t) = 6t(t-2) = 0$ より, $t = 0,\ 2$.

$$\therefore\ g(0)\cdot g(2) = a(a-8) < 0 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

より, (3.4) と同様の結果を得る．

Comment

曲線上の点 (仮の接点) で接線を引き, A を通すのがポイントである．また, 後半は方程式の解の個数を数える問題となっているが, これを (3.2) のようにパラメータの a を分離して考えるか, (3.6) のように’ 極値の積’ で考えるかは case by case である．パラメータ分離によると, a を動かしたときの解の挙動がグラフから読みとり易いという利点があるが, いつでもパラメータ分離が易しいとは限らない．

重要なのは波線部である．この事実 (実数解の個数 = 接線の本数) は, 3 次曲線が複接線 (異なる 2 点で同時に接する接線) を持たないという性質に基づいているが, 解答の際は証明なしで用いてよい．

Point

方程式の解の個数 $\Longrightarrow$ **パラメータ分離**, または, **極値の積**

【Review 2.3.1】 2003 近畿大

関数 $u(x)$, $v(x)$ を

$$u(x)=x^3,\quad v(x)=(x-2)^3+k$$

で定義し，平面上の曲線を

$$\mathfrak{C}_1 : y=u(x),\quad \mathfrak{C}_2 : y=v(x)$$

と定める.

この 2 曲線 $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ に対して，点 $\mathrm{P}(t, u(t))$ において $\mathfrak{C}_1$ に接し，

点 $\mathrm{Q}(s, v(s))$ において $\mathfrak{C}_2$ に接する共通接線を $\mathfrak{L}$ とする.

(1) s, t の関係式および k, t の関係式を求めよ.

(2) $k=0$ のときの共通接線 $\mathfrak{L}$ をすべて求めよ.

(3) $k=2$ のときの共通接線 $\mathfrak{L}$ をすべて求めよ.

(4) 共通接線 $\mathfrak{L}$ の本数を k の値で分類して調べよ.

[答] (1) $s=2+t$, $k=6t^2$ または $s=2-t$, $k=-4t^3+6t^2$

(2) $y=0$, $y=\dfrac{27}{4}(x-1)$ (3) $y=x\pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, $y=3x-2$, $y=\dfrac{3x+1}{4}$

(4) $k<0\cdots1$ 本, $k=0\cdots2$ 本, $0<k<2\cdots5$ 本, $k=2\cdots4$ 本, $2<k\cdots3$ 本

【Review 2.3.2】 98 京大

実数 a に対して，$f(x)=x^3-3ax$ と置く.

(1) 方程式 $f(x)=t$ が異なる 3 個の実数解を持つために a, t が満たすべき条件を求めよ.

(2) $g(x)=f(f(x))$ と置く.

方程式 $g(x)=0$ が異なる 9 個の実数解を持つような a の値の範囲を求めよ.

[答] (1) $-2a\sqrt{a}<t<2a\sqrt{a}$ $(a>0)$ (2) $a>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$