

【Example 0.1】

放物線 $\mathcal{C}: y = ax^2$ ($a > 0$) 上の 2 点 $P_1: x = x_1, P_2: x = x_2$ における接線をそれぞれ $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ とする。
 更に、2 接点 P_1, P_2 を結ぶ直線を g として、 \mathcal{C} と g の囲む領域の面積を S_{up} , \mathcal{C} と $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ の囲む領域の面積を S_{low} とするとき、 $S_{up}:S_{low} = 2:1$ が成り立つことを示せ。

Point

積分公式

$$\int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

を用いて計算を効率化する。

【解説】

P_1 における接線 \mathcal{L}_1 の方程式は、

$$y = 2ax_1(x - x_1) + ax_1^2 \iff y = 2ax_1x - ax_1^2 \quad \dots\dots(1.1)$$

P_2 における接線 \mathcal{L}_2 の方程式は、

$$y = 2ax_2(x - x_2) + ax_2^2 \iff y = 2ax_2x - ax_2^2 \quad \dots\dots(1.2)$$

このとき、 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ の交点 Q の座標は、

$$Q\left(\frac{x_1+x_2}{2}, ax_1x_2\right) \quad \dots\dots(1.3)$$

また、2 点 P_1, P_2 を結ぶ直線 g の方程式は、

$$y = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1}(x - x_1) + ax_1^2 \iff y = a(x_1 + x_2)x - ax_1x_2 \quad \dots\dots(1.4)$$

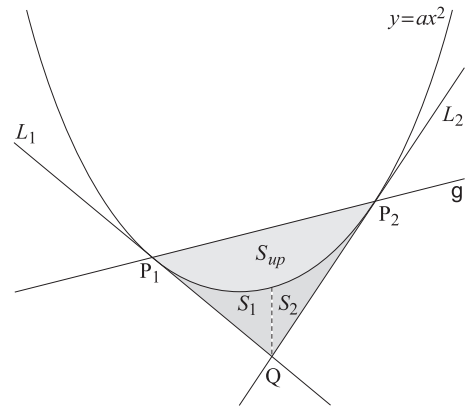
であるから、題意の面積 S_{up} は、

$$S_{up} = \int_{x_1}^{x_2} \{a(x_1 + x_2)x - ax_1x_2 - ax^2\} dx = -a \times \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx = \frac{a}{6}(x_2 - x_1)^3 \quad \dots\dots(1.5)$$

一方、 $\mathcal{L}_1, \mathcal{C}$, 直線 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ の囲む部分の面積を S_1 ,

更に、 $\mathcal{L}_2, \mathcal{C}$, 直線 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ の囲む部分の面積を S_2 と表せば、

$$\begin{aligned} S_{low} &= S_1 + S_2 \\ &= \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} \{ax^2 - (2ax_1x - ax_1^2)\} dx + \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} \{ax^2 - (2ax_2x - ax_2^2)\} dx \\ &= a \times \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} (x - x_1)^2 dx + a \times \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} (x - x_2)^2 dx \\ &= \left[\frac{a}{3}(x - x_1)^3\right]_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} + \left[\frac{a}{3}(x - x_2)^3\right]_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} = \frac{a}{24}(x_2 - x_1)^3 - \frac{a}{24}(x_1 - x_2)^3 \\ &= \frac{a}{12}(x_2 - x_1)^3 \quad \dots\dots(1.6) \end{aligned}$$



(1.5), (1.6) により,

$$S_{up} : S_1 : S_2 = \frac{a}{6}(x_2 - x_1)^3 : \frac{a}{24}(x_2 - x_1)^3 : \frac{a}{24}(x_2 - x_1)^3 = 4 : 1 : 1 \quad \dots\dots(1.7)$$

従って, (1.7) により,

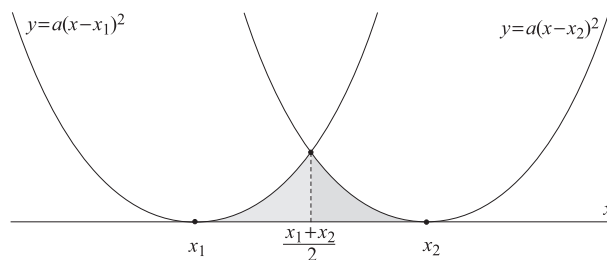
$$S_{up} : S_{low} = 2 : 1 \quad \dots\dots(1.8)$$

[Note]

(1.6) において, 明らかに $S_1 = S_2$ が成り立つ.

何故なら,

$$S_1 = \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} a(x-x_1)^2 dx \quad \dots\dots(1.9)$$



より, $\mathcal{C}, \mathcal{L}_1, x = \frac{x_1+x_2}{2}$ の囲む部分の面積 S_1 は,

放物線 $y = a(x-x_1)^2$, x 軸, 直線 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ の囲む領域の面積に等積変形でき,

S_2 も同様に, 放物線 $y = a(x-x_2)^2$, x 軸, 直線 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ の囲む領域の面積に一致するからである.

【Example 0.2】

白球 6 個, 赤球 4 個の入った箱から 1 個ずつ無作為に球を取り出す試行を考える.
取り出した赤球の個数が白球の個数を上回ったとき, 試行を終了するものとして,
箱の中の球がすべて取り出される確率を求めよ.

Point

試行の過程を graph を用いて視覚化する

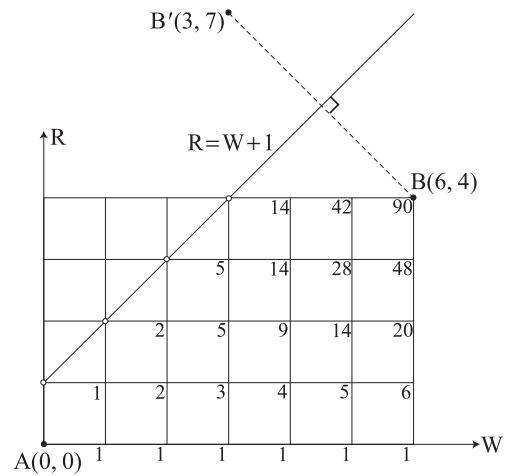
【解説】

球の取り出し方の各々に対して, 右図の点 $A(0, 0)$ から $B(6, 4)$ への経路を対応させて考えれば, その総数は,

$${}_{10}C_6 = {}_{10}C_4 = 210 \text{ (通り)} \quad \dots\dots (2.1)$$

この 210 通りの取り出し方の中で, 題意の条件 (赤球の個数が白球の個数を上回らない) を満たす取り出し方は, 図における直線 $R = W + 1$ に接触しない経路の総数であるから, 図に記した様に数え上げて 90 通りあり, 求める確率は,

$$\frac{90}{{}_{10}C_4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \quad \dots\dots (2.2)$$



【別解】

$A(0, 0)$ から $B(6, 4)$ への経路の中で, 直線 $g: R = W + 1$ に接触する経路の総数 $n(A, B)$ は, A から $B'(3, 7)$ への経路の総数 $n(A, B')$ と一致する. ここで, B' は B の g に関する対称点である. 即ち, g に接触する経路の各々に対して, その最初の接触点 T から B までの部分を g で折り返せば, $A \rightarrow T \rightarrow B'$ なる経路が得られ, この折り返し操作により,

$$n(A, B) \leq n(A, B') (= {}_{10}C_3) \quad \dots\dots (2.3)$$

の成立が言える (次頁図参照). 一方,

A から B' に至る経路はすべて g を通過するので, その最初の接触点 T から B' までの部分を g で折り返せば, $A \rightarrow T \rightarrow B$ なる経路が得られ, この折り返し操作により,

$$n(A, B) \geq n(A, B') (= {}_{10}C_3) \quad \dots\dots (2.4)$$

の成立も言える.

(2.3), (2.4) により,

$$n(A, B) = n(A, B') (= {}_{10}C_3) \quad \dots\dots (2.5)$$

(2.5) により, 求める確率は,

$$\frac{{}_{10}C_4 - {}_{10}C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{210 - 120}{210} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \quad \dots\dots (2.6)$$

[Note]

設定が白球 60 個、赤球 40 個の場合や、白球 n 個、赤球 m 個等の場合を想定すれば、数え上げによる方法よりも折り返しによる計算が現実的であることは言うまでもない。ただ、折り返すという発想そのものが高級であり、更に、 $n(A, B) = n(A, B')$ は直接には導けず、(2.3) \wedge (2.4) という論理に従っているので、答案作成の際は、その辺りの丁寧な説明が必要であろう。

更に、確率の問題では 6 個の白球、4 個の赤球は区別して考えるべきであるから、10 個の球の取り出し方の総数は、

$${}_{10}C_4 \times 6!4! = 10! \text{ (通り)} \quad \dots\dots(2.7)$$

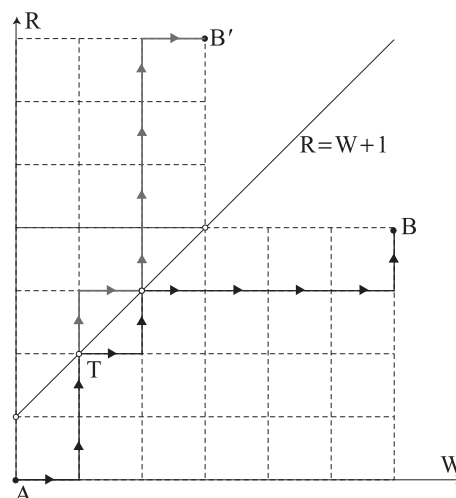
となる。

一方、題意の条件を満たす取り出し方の場合の数は、 ${}_{10}C_4 - {}_{10}C_3$ (通り) であるから、白球 6 個、赤球 4 個に区別を与えた場合、 $({}_{10}C_4 - {}_{10}C_3) \times 6!4!$ (通り) となり、求める確率は、

$$\frac{\{ {}_{10}C_4 - {}_{10}C_3 \} \times 6!4!}{10!} = \frac{{}_{10}C_4 - {}_{10}C_3}{\frac{10!}{6!4!}} = \frac{{}_{10}C_4 - {}_{10}C_3}{{}_{10}C_4} \quad \dots\dots(2.8)$$

と計算できる。

即ち、本来順列の比として計算すべき確率を組合せの比として求めていることに注意せよ。



【Example 0.3】

(1) 平面上の点 A_1, A_2, \dots, A_n と $m_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) に対して,

$$\sum_{k=1}^n m_k PA_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k GA_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) GP^2 \quad \dots\dots(3.1)$$

が成り立つ。ここで,

P は平面上の任意の点であり, G は n 角形 $A_1A_2 \dots A_n$ の加重重心

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n m_k} \sum_{k=1}^n m_k \vec{OA}_k \quad \dots\dots(3.2)$$

である。また, m_k ($k = 1, 2, \dots, n$) のすべては 0 でないとする。

(2) 三角形 $A_1A_2A_3$ と A_2A_3 の中点 M に対して,

$$A_1A_2^2 + A_1A_3^2 = MA_2^2 + MA_3^2 + 2MA_1^2 \quad (\text{中線定理}) \quad \dots\dots(3.3)$$

が成り立つことを示せ。

Point

$$\sum_{k=1}^n m_k PA_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k GA_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) GP^2 \quad (\text{Lagrange の恒等式})$$

ただし,

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n m_k} \sum_{k=1}^n m_k \vec{OA}_k \quad \wedge \quad m_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

【解説】

(1) (3.1) の左辺を G を始点とする vector で表すと,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k PA_k^2 &= \sum_{k=1}^n m_k |\vec{GA}_k - \vec{GP}|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n m_k |\vec{GA}_k|^2 + \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) |\vec{GP}|^2 - 2\vec{GP} \cdot \sum_{k=1}^n m_k \vec{GA}_k \\ &= \sum_{k=1}^n m_k GA_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) GP^2 \quad (\because (3.4)) \end{aligned}$$

ここで, (3.2) より,

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{OG} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{OA}_k \iff \sum_{k=1}^n m_k \{ \vec{OA}_k - \vec{OG} \} = \vec{0} \iff \sum_{k=1}^n m_k \vec{GA}_k = \vec{0} \quad \dots\dots(3.4)$$

を用いた。

(2) (3.1) において,

$$n = 3 \quad \wedge \quad m_1 = 0 \quad \wedge \quad m_2 = m_3 = 1 \quad \wedge \quad P = A_1 \quad \wedge \quad G = M \quad \dots\dots(3.5)$$

と置けば,

$$0 \times A_1A_1^2 + 1 \times A_1A_2^2 + 1 \times A_1A_3^2 = 0 \times MA_1^2 + 1 \times MA_2^2 + 1 \times MA_3^2 + (0+1+1)MA_1^2$$

$$\iff A_1A_2^2 + A_1A_3^2 = MA_2^2 + MA_3^2 + 2MA_1^2 \quad \dots\dots(3.3)$$

実際, $m_1 = 0 \wedge m_2 = m_3 = 1$ のとき, (3.2) は,

$$\vec{OM} = \frac{1}{0+1+1}(0 \times \vec{OA_1} + 1 \times \vec{OA_2} + 1 \times \vec{OA_3}) \iff \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA_2} + \vec{OA_3}) \quad \dots\dots(3.6)$$

となり, (3.5) の $P = A_1 \wedge G = M$ に矛盾しない.

[Note]

(3.1) は'Lagrange の恒等式' という有名な恒等式である.

等式のポイントは, P の移動に伴う左辺 n 項すべての変動を右辺 GP^2 の 1 項の変動に集約させていることである.

更に, P は任意にとれるので, $P = G$ とすれば,

$$\sum_{k=1}^n m_k PA_k^2 \geq \sum_{k=1}^n m_k GA_k^2 \quad \dots\dots(3.7)$$

なる絶対不等式が得られる.

また, (3.3) の'中線定理' で示したように, 各頂点の重み $m_k \geq 0$ を変化させたり, P の位置を変えることにより様々な定理が導かれる.

