相加平均 · 相乗平均 · 調和平均の不等式

$a_1>0,\ a_2>0,\ \cdots\cdots,\ a_n>0$ のとき，不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\times\cdots\times a_n} \geqq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$$

が成り立つ．等号は，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限り成立．

【1.1】

次の関数の最小値を求めよ．

(1) $2x+\dfrac{2}{3x}\ (x>0)$　(2) $9x+\dfrac{4}{x-1}\ (x>1)$　(3) $\dfrac{2x^2+3}{x-1}\ (x>1)$

【1.2】

次の各関数の最大値，最小値について調べよ．

(1) $\dfrac{x}{x^2+x+4}$　(2) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$　(3) $\dfrac{x^4+5x^2+8}{x^2+1}$　(4) $\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$

【1.3】

$x>0$ において，関数

$$x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$$

の最小値と最小値を与える x の値を求めよ．

【1.4】

2 次方程式の実数解条件を用いて，次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-2x+1}$　(2) $\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}$　(3) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$　(4) $\dfrac{x+y}{2x^2+3y^2+1}$

【2.1】 3 変数の証明

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき，

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

が成り立つことを示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【2.2】

正数 $a,\ b,\ c$ が $a+b+c=1$ を満たすとき，

$$a\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+b\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)+c\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

の最小値と最小値を与える $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

【2.3】 92 東京情報大

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ a+b+c=1$ のとき，

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

の最小値と最小値を与える $a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

【2.4】

次の関数の最小値と最小値を与える x の値を求めよ．

(1) $x+\dfrac{1}{x^2}\ \ (x>0)$ (2) $x^2+\dfrac{1}{x}\ \ (x>0)$ (3) $2x+\dfrac{16}{x^4}\ \ (x>0)$

【3.1】

正数 a, b, c に対して，$a+b+c=s$ と表すとき，

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{s}\right) \geq \frac{8}{s^3}$$

の成立を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【3.2】　92 学習院

正数 a, b, c に対して，不等式

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geq (1+abc)^3$$

の成立を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【3.3】　□東京女子大

正整数 n と任意の正数 x に対して，不等式

$$x+\frac{1}{x^n} \geq \frac{2n}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}$$

が成り立つことを示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【4.1】 88 横浜国大

正整数 n に対して，次の命題を $\mathrm{P}(n)$ とする．

$$\mathrm{P}(n): 正数\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n に対して，\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\times\cdots\times a_n}\ が成り立つ$$

(1) $\mathrm{P}(2)$ の成立を示せ．

(2) $\mathrm{P}(k)$ の成立を仮定して，$\mathrm{P}(2k)$ の成立を示せ．

(3) $\mathrm{P}(k+1)$ の成立を仮定して，$\mathrm{P}(k)$ の成立を示せ．

【4.2】 □金沢大

$x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots,\ x_n>0$ のとき，相加相乗平均の不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\times\cdots\times x_n}$$

が成り立つことを帰納法と微分法を用いて示せ．

【4.3】 87 早稲田

$n\,(\geqq 2)$ 個の正数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ に対して，

$$\mathrm{A}=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad \mathrm{B}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

と表すとき，A, B の少なくとも一方は n より小さくないことを示せ．

【4.4】 92 滋賀医大

三角形 ABC を鋭角三角形とし，その内角を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする．

(1) $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ が成り立つことを示せ．

(2) $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\mathrm{P}$ とおくとき，P の最小値を求めよ．

(3) P が最小値をとるときの三角形 ABC の形状を求めよ．

Schwarz の不等式

実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対して，不等式

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2 \leq ({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)({y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_n}^2)$$

が成り立つ．ここで，等号は

$$x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = \cdots = x_n : y_n$$

のときに限り成立.

【5.1】 91 早稲田

(1) 実数 x_k, y_k を係数とする λ の 2 次式

$$(x_k\lambda - y_k)^2 = {x_k}^2\lambda^2 - 2x_ky_k\lambda + {y_k}^2\,(\geq 0)$$

を利用して，不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \times \sum_{k=1}^{n} {y_k}^2$$

の成立を示せ．また，等号の成立条件を求めよ.

(2) 5 個の実数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 に対して，

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=10, \quad {a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2+{a_5}^2=25$$

が成り立つとき，a_5 の最大値と最小値を求めよ.

【5.2】

$x+y+z=3$ のとき，関数

$$f(x, y, z) = x^2+2y^2+3z^2$$

の最小値を求めよ．また，最小値を与える x, y, z の値を求めよ.

【5.3】 95 同志社

a, b, x, y を実数とし，c, z を正数とする.

$$a^2+b^2=c^2-1 \ \wedge\ x^2+y^2=z^2-1$$

が成り立つとき，不等式

$$ax+by \leq cz-1$$

が成り立つことを示せ.

【5.4】 95 東大

すべての正数 x, y に対して，

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ．

【5.5】 92 武蔵工大

三角形 ABC において，$\angle \mathrm{BAC}=30^\circ$，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=3$ とする．

また，辺 BC 上の点 P から直線 AB, AC に下ろした垂線をそれぞれ PM, PN とする．

点 P が辺 BC 上を動くとき，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PM}}+\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{PN}}$ の最小値を求めよ．

【5.6】 積分型の Schwarz の不等式

関数 $f(x)$，$g(x)$ は区間 $[a,\ b]$ において連続とする．このとき，

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathbf{d}x\right)^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2\,\mathbf{d}x \times \int_a^b \{g(x)\}^2\,\mathbf{d}x$$

なる不等式の成立を示せ．

Chebysev の不等式

$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \ \wedge \ b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ のとき，不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \times \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}$$

が成り立つ．ここで，等号は

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \ \vee \ b_1 = b_2 = \cdots = b_n$$

のときに限り成立.

【6.1】 92 東北大

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k \leq n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

【6.2】 88 福井工大

$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x+y+z = 3$ のとき，

$$x^3+y^3+z^3 \geq x^2+y^2+z^2 \geq 3$$

が成り立つことを示せ.

【6.3】 86 京大

すべては 0 でない実数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n があり，

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \ \wedge \ a_1+a_2+\cdots+a_n = 0$$

を満たすとき，不等式

$$a_1+2a_2+\cdots+na_n > 0$$

が成り立つことを示せ.

【6.4】 87 東大

n を 2 以上の正整数とする.

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \ \wedge \ y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

を満たす数列 x_1, x_2, $\cdots$, x_n および y_1, y_2, $\cdots$, y_n が与えられている.
数列 y_1, y_2, $\cdots$, y_n を並べ替えて得られる如何なる数列 z_1, z_2, $\cdots$, z_n に対しても

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2$$

が成り立つことを示せ.

凸関数不等式

上に凸な関数 $f(x)$ に対して，

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n) \geq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$$

が成り立つ．ここで，t_k $(k=1,2,3,\cdots,n)$ は

$$t_k>0\ (k=1,2,3,\cdots,n)\ \wedge\ t_1+t_2+\cdots+t_n=1$$

を満たす実数である．

【7.1】

(1) a, b, c を実数とするとき，不等式

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

が成り立つことを示せ．また，等号の成立条件を求めよ．

(2) a, b, c を正数とするとき，不等式

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

が成り立つことを示せ．また，等号の成立条件を求めよ．

【7.2】

関数 $f(x)$ の区間 $[a,\ b]$ における凸性

$$f((1-t)a+tb) \geq (1-t)f(a)+tf(b) \quad (0\leq t\leq 1)$$

を利用して，不等式

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3}{3} \qquad \cdots\cdots②$$

$$\sin\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\sin x_4}{4} \qquad \cdots\cdots③$$

が成り立つことを示せ．

ただし，$0\leq x_k\leq \pi$ $(k=1,2,3,4)$ とする．

【7.3】

関数 $f(x)$ の区間 $[a,\ b]$ における凸性

$$f(sa+tb) \geq sf(a)+tf(b) \quad (s+t=1\ \wedge\ s>0\ \wedge\ t>0)$$

を前提に帰納法を用いて，

$$f(\textstyle\sum_{k=1}^n t_kx_k) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^n t_kf(x_k)\ \ \wedge\ \ \sum_{k=1}^n t_k=1\ \ \wedge\ \ t_k>0\ \ (k=1,2,\cdots,n)$$

が成り立つことを示せ．