【8.1】

n はすべての正整数を動くとする.
複素数 $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ に対して,

$$\frac{(1-\alpha^n)(1-\alpha^{2n})(1-\alpha^{3n})(1-\alpha^{4n})(1-\alpha^{5n})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

の値を求めよ.

【解答】

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{6} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

は 1 の 6 乗根で, その偏角が正で最小なもの. 即ち, 1 の原始 6 乗根である.
従って, 1 の 6 乗根はすべて

$$\alpha^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

の形に表せる.
$n \equiv k \pmod 6$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, 5)$ のとき,

$$\alpha^n = \alpha^k \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

であるから, (1.1) における n を mod.6 で考えてよい.
このとき, $\alpha^n, \alpha^{2n}, \cdots\cdots, \alpha^{5n}$ の値を表にすると,

n	α^n	α^{2n}	α^{3n}	α^{4n}	α^{5n}
1	α	α^2	α^3	α^4	α^5
2	α^2	α^4	$\alpha^6 = 1$	$\alpha^8 = \alpha^2$	$\alpha^{10} = \alpha^4$
3	α^3	$\alpha^6 = 1$	$\alpha^9 = \alpha^3$	$\alpha^{12} = 1$	$\alpha^{15} = \alpha^3$
4	α^4	$\alpha^8 = \alpha^2$	$\alpha^{12} = 1$	$\alpha^{16} = \alpha^4$	$\alpha^{20} = \alpha^2$
5	α^5	$\alpha^{10} = \alpha^4$	$\alpha^{15} = \alpha^3$	$\alpha^{20} = \alpha^2$	$\alpha^{25} = \alpha$
6	1	1	1	1	1

となるので,
(A) $n = 2, 3, 4, 6$ のとき, (1.1) 分子の少なくとも 1 つの因数は 0 となり,
(B) $n = 1, 5$ のとき, (1.1) 分子と分母の因数はすべて一致する.
以上より,

$$\frac{(1-\alpha^n)(1-\alpha^{2n})(1-\alpha^{3n})(1-\alpha^{4n})(1-\alpha^{5n})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)} = \begin{cases} 1 & (n \equiv 1, 5 \pmod 6) \\ 0 & (n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod 6) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

[Note]　一般に, 1 の n 乗根

$$z = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

に対して, $\gcd(n, k) = 1$ なる z^k を原始 n 乗根といい,

$$z^k,\ z^{2k},\ z^{3k},\ \cdots\cdots,\ z^{(n-1)k},\ z^{nk}$$

により, すべての (1 の) n 乗根を網羅する.
本問は原始根のこの性質をテーマにしており, 過去高頻度で出題されている.

【8.2.a】

複素平面上において，三角形 ABC の頂点を表す複素数 α, β, γ が次の条件を満たす.

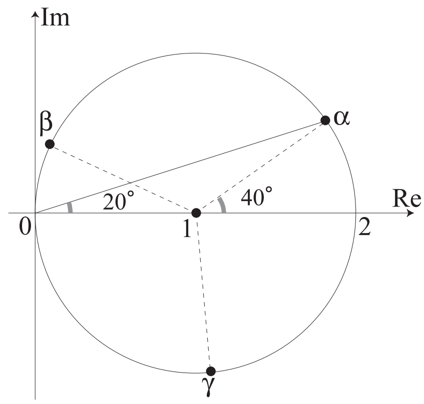
$$\text{(A)}\ \ |\alpha-\beta|=|\beta-\gamma|=|\gamma-\alpha|=\sqrt{3}\quad \text{(B)}\ \ \alpha+\beta+\gamma=3\quad \text{(C)}\ \ |\alpha\beta\gamma|=1\ \wedge\ \Im(\alpha\beta\gamma)>0$$

ただし，$\Im(z)$ は複素数 z の虚部を表す.

(1) $z=\alpha-1$ とするとき，β, γ を z の式で表せ.

(2) α, β, γ の偏角を求めよ．ただし，$0^\circ \leq \arg.\alpha \leq \arg.\beta \leq \arg.\gamma < 360^\circ$ とする.

【解答】



(1) 条件 (A) より，

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots(2.a.1)$$

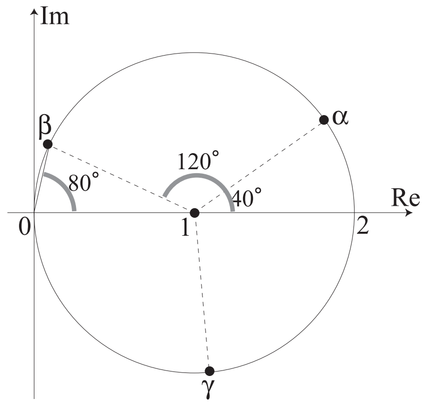
条件 (B) より，

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=1 \qquad \cdots\cdots(2.a.2)$$

(2.a.1), (2.a.2) より正三角形 ABC の重心 G の表す複素数は 1 であり，2 頂点 B, C は A を重心 G の周りに $\pm120^\circ$ 回転して得られる．そこで，1 の原始 3 乗根の一方を ω として，

$$\beta-1=\omega(\alpha-1)\ \wedge\ \gamma-1=\overline{\omega}(\alpha-1)$$

$$\iff\ \beta=\omega z+1\ \wedge\ \gamma=\overline{\omega}z+1 \qquad \cdots\cdots(2.a.3)$$



(2) $\mathrm{GA}=\mathrm{GB}=\mathrm{GC}=1\,(=$ **外接円の半径**$)$ であるから，

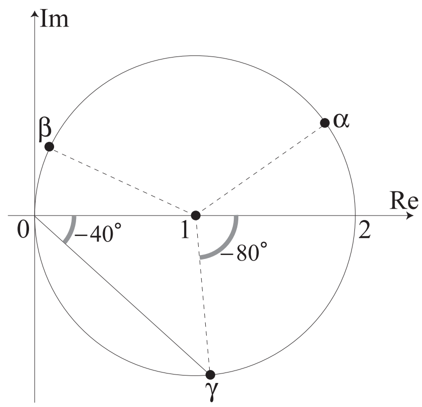
$$\mathrm{GA}=|\alpha-1|=|z|=1 \qquad \therefore\ |z|=1 \qquad \cdots\cdots(2.a.4)$$

また，(1) の結果から，

$$\alpha=z+1,\quad \beta=\omega z+1,\quad \gamma=\overline{\omega}z+1 \qquad \cdots\cdots(2.a.5)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma&=(z+1)(\omega z+1)(\overline{\omega}z+1)\quad (\because\ (2.a.5))\\&=\omega\overline{\omega}z^3+(\omega+\omega\overline{\omega}+\overline{\omega})z^2+(1+\omega+\overline{\omega})z+1\\&=z^3+1\quad (\because\ \omega+\overline{\omega}+1=0)\\&=(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^3+1\quad (\because\ (2.a.4))\\&=(1+\cos3\theta)+\mathbf{i}\sin3\theta \qquad \cdots\cdots(2.a.6)\end{aligned}$$



更に，条件 (C) より，

$$\begin{aligned}&(1+\cos3\theta)^2+(\sin3\theta)^2=1\ \wedge\ \sin3\theta>0\\\iff&\ \cos3\theta=-\frac{1}{2}\ \wedge\ \sin3\theta>0\\\iff&\ 3\theta\equiv120^\circ\pmod{360^\circ}\\\iff&\ \theta\equiv40^\circ,\ 160^\circ,\ 280^\circ\pmod{360^\circ} \qquad \cdots\cdots(2.a.7)\end{aligned}$$

従って，$\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ は集合として

$$\{1+\cos 40^\circ+\mathbf{i}\sin 40^\circ,\ 1+\cos 160^\circ+\mathbf{i}\sin 160^\circ,\ 1+\cos 280^\circ+\mathbf{i}\sin 280^\circ\} \qquad \cdots\cdots(2.a.8)$$

と一致する．更に，

$$0^\circ \leq \arg.\alpha \leq \arg.\beta \leq \arg.\gamma < 360^\circ$$

より，前頁の図において**円周角の定理**を用いて，

$$\arg.\alpha = \frac{1}{2}\times 40^\circ = 20^\circ,\quad \arg.\beta = \frac{1}{2}\times(40^\circ+120^\circ) = 80^\circ,\quad \arg.\gamma = 360^\circ - \frac{1}{2}\times 80^\circ = 320^\circ$$

$$\therefore\quad \arg.\alpha = 20^\circ,\quad \arg.\beta = 80^\circ,\quad \arg.\gamma = 320^\circ \qquad \cdots\cdots(2.a.9)$$

【8.2.b】

0 と異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 があり，次の条件を満たしている．

(A) $\arg .z_1 = \arg .z_2 + 120^\circ$

(B) 点 z_3 は 2 点 z_1, z_2 を通る直線に関して 0 と反対側にある

(C) 三角形 $z_1 z_2 z_3$ は正三角形である

このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\alpha = \cos 60^\circ + \mathbf{i} \sin 60^\circ$ とするとき，

$$\alpha z_1 = p z_1 + q z_2, \quad \alpha z_2 = s z_1 + t z_2$$

を満たす実数 p, q, s, t をそれぞれ $|z_1|$, $|z_2|$ を用いて表せ．

(2) $z_3 = a z_1 + b z_2$ を満たす実数 a, b をそれぞれ $|z_1|$, $|z_2|$ を用いて表せ．

【解答】

(1) 下図において，点 αz_1 は原点 0 に関して点 z_2 と反対側にあるので，
z_1, z_2 の長さ (絶対値) を考慮して，

$$\alpha z_1 = -\frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \iff p = 0 \ \wedge \ q = -\frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \cdots\cdots(2.b.1)$$

また，z_2 を原点 0 の周りに 120° 回転した点を $z_2{}'$ と表せば，図より，

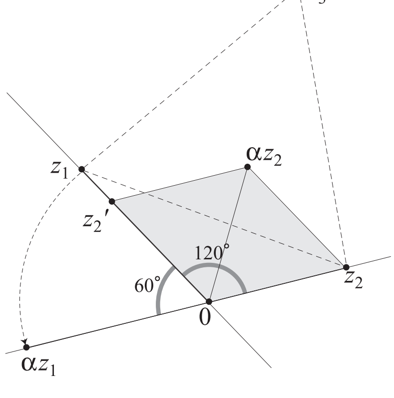
$$z_2{}' = \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 \qquad \cdots\cdots(2.b.2)$$

このとき，αz_2 は $\overrightarrow{0z_2}$, $\overrightarrow{0z_2{}'}$ の張る平行四辺形 **(菱形)** の対角の頂点であるから，

$$\alpha z_2 = z_2 + z_2{}' = z_2 + \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 \iff s = \frac{|z_2|}{|z_1|} \ \wedge \ t = 1 \qquad \cdots\cdots(2.b.3)$$

(2) 三角形 $z_1 z_2 z_3$ が正三角形であるための必要十分条件は，

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1) &\iff z_3 = (1-\alpha) z_1 + \alpha z_2 \\ &\iff z_3 = \left(1 + \frac{|z_2|}{|z_1|}\right) z_1 + \left(1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}\right) z_2 \\ &\iff a = 1 + \frac{|z_2|}{|z_1|} \ \wedge \ b = 1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \cdots\cdots(2.b.4) \end{aligned}$$



【8.3.a】

複素平面上の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する．

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = \mathbf{i} & \cdots\cdots(3.a.1) \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) & \cdots\cdots(3.a.2) \end{cases}$$

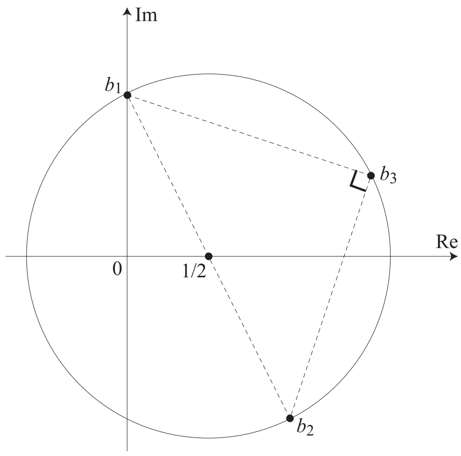
また，数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する．

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.a.3)$$

(1) 3 点 $b_k\ (k = 1, 2, 3)$ は同一円 $\mathfrak{C}$ の周上にあることを示し，その中心と半径を求めよ．

(2) すべての点 $b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ は円 $\mathfrak{C}$ の周上にあることを示せ．

【解答】



(1) 3 点 $b_k\ (k = 1, 2, 3)$ について，

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \mathbf{i},\ b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\mathbf{i}+1}{\mathbf{i}} = 1 - \mathbf{i},\ b_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1+2\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \frac{3+\mathbf{i}}{2}$$

より，b_3 を中心に b_1 を正の方向に 90° 回転すると b_2 に重なる．

$$\because\ (\cos 90^\circ + \mathbf{i}\sin 90^\circ)(b_1 - b_3) = \mathbf{i} \times \left(\mathbf{i} - \frac{3+\mathbf{i}}{2}\right)$$
$$= \frac{-1-3\mathbf{i}}{2} = (1-\mathbf{i}) - \frac{3+\mathbf{i}}{2} = b_2 - b_3$$

即ち，三角形 $b_1b_2b_3$ は $\overrightarrow{b_1b_2}$ を斜辺とする直角二等辺三角形である．

従って，3 点 $b_k\ (k = 1, 2, 3)$ は，中心 $\dfrac{1}{2}$，半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ の円周上にある．

(2) 漸化式 (3.a.2) と初期条件 (3.a.1) により，各項 a_n の実部と虚部は単調に増加する．

従って，絶対値 $|a_n|$ の値も単調に増加するので，$a_n \neq 0\ (\forall n)$ が成り立つ．

漸化式 (3.a.2) の両辺を $a_{n+1}\,(\neq 0)$ で割り，

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \iff b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \quad \left(\wedge\ b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}\ \ (\forall n)\right) \qquad \cdots\cdots(3.a.4)$$

となるので，漸化式 (3.a.4) で定義される無限個の点 b_n が $\mathfrak{C}$ 上に存在することを示せばよい．

そこで，複素平面上の 1 次分数変換

$$w = 1 + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0) \qquad \cdots\cdots(3.a.5)$$

が円 $\mathfrak{C}$ を $\mathfrak{C}$ 自身に移すことを示せば証明は完結する．

(3.a.5) を逆に解き，

$$z = \frac{1}{w-1} \quad (w \neq 1) \qquad \cdots\cdots(3.a.6)$$

(3.a.6) を $\mathfrak{C}$ の方程式

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \cdots\cdots(3.a.7)$$

に代入して，

$$\left|\frac{1}{w-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2} \iff |2-(w-1)|=\sqrt{5}|w-1| \ \wedge\ w\neq 1$$
$$\iff (w-3)(\overline{w}-3)=5(w-1)(\overline{w}-1) \ \wedge\ w\neq 1$$
$$\iff 4w\overline{w}-2(w+\overline{w})=4 \ \wedge\ w\neq 1$$
$$\iff \left(w-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{w}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4} \ \wedge\ w\neq 1 \iff \left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2} \ \wedge\ w\neq 1 \quad \cdots\cdots(3.a.8)$$

(3.a.8) は w が $\mathfrak{C}$ の周上にあることを意味している．即ち，$\mathfrak{C}$ が変換 (3.a.5) の**不動円**であることが示せた．
以上より，b_1 より帰納的にすべての b_n が $\mathfrak{C}$ の周上に存在する．

[Note.1]　**不動円**を用いない (2) の証明;
ある正整数 n に対して，b_n が $\mathfrak{C}$ 上にあると仮定する．即ち，

$$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2} \iff b_n\overline{b_n}-\frac{1}{2}\left(b_n+\overline{b_n}\right)-1=0 \quad \cdots\cdots(3.a.9)$$

の成立を仮定するとき，

$$\left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|^2=\left|\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}\right|^2=\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\overline{b_n}}+\frac{1}{2}\right) \quad (\because\ (3.a.4))$$
$$=\frac{b_n\overline{b_n}+2(b_n+\overline{b_n})+4}{4b_n\overline{b_n}}=\frac{b_n\overline{b_n}+4(b_n\overline{b_n}-1)+4}{4b_n\overline{b_n}}=\frac{5}{4} \quad (\because\ (3.a.9))$$
$$\therefore\ \left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

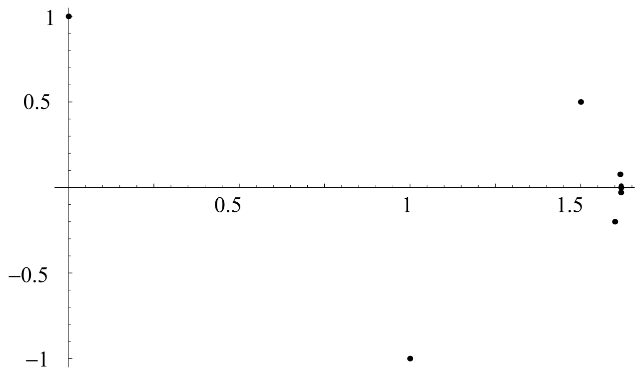
[以下略]

[Note.2]　数列 $\{b_n\}$ の最初の 10 項 $b_1, b_2, \cdots, b_{10}$ のリストと点の分布を出力する．
点列 $\{b_n\}$ が実軸上のある点に収束する様子が確認できるだろうか?? 即ち，

$$b_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887\cdots\cdots$$

が成り立つ．この事実を計算により確認せよ．

b_1 :　$0+\mathbf{i}$
b_2 :　$1-\mathbf{i}$
b_3 :　$1.5+0.5\mathbf{i}$
b_4 :　$1.6-0.2\mathbf{i}$
b_5 :　$1.61538+0.0769231\mathbf{i}$
b_6 :　$1.61765-0.0294118\mathbf{i}$
b_7 :　$1.61798+0.011236\mathbf{i}$
b_8 :　$1.61803-0.00429185\mathbf{i}$
b_9 :　$1.61803+0.00163934\mathbf{i}$
b_{10} :　$1.61803-0.000626174\mathbf{i}$



【8.3.b】

複素平面上の変換

$$w = \frac{1}{z-\alpha} \quad (z \neq \alpha) \qquad \cdots\cdots(3.b.1)$$

による実軸の像がある直線になるとき，次の問いに答えよ．

(1) α の満たすべき条件を求めよ． (2) この変換による虚軸の像を求めよ．

【解答】

変換 (3.b.1) を逆に解いて，

$$z = \frac{1}{w} + \alpha \quad (w \neq 0) \qquad \cdots\cdots(3.b.2)$$

(1) ある複素数 z が実軸上を動くとき，$z = \bar{z}$ が成り立つ．

即ち，$z = \bar{z}$ は実軸の方程式と考えてよく，これを変換 (3.b.2) で移すと，

$$\frac{1}{w} + \alpha = \frac{1}{\overline{w}} + \overline{\alpha} \iff (\alpha - \overline{\alpha})w\overline{w} - w + \overline{w} = 0 \ \wedge \ w \neq 0 \qquad \cdots\cdots(3.b.3)$$

(3.b.3) が直線を表すためには，

$$\alpha - \overline{\alpha} = 0 \iff \alpha = \overline{\alpha} \iff \alpha \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots(3.b.4)$$

であることが必要で，このとき，

$$(3.b.3) \wedge (3.b.4) \iff w = \overline{w} \ \wedge \ w \neq 0 \qquad \cdots\cdots(3.b.5)$$

より，点 w は原点 0 を除く実軸 $(w = \overline{w})$ 上を動く．

従って，題意成立のための α の条件は $\alpha \in \mathbb{R}$ である．

(2) ある複素数 z が虚軸上を動くとき，$z + \bar{z} = 0$ が成り立つ．

即ち，$z + \bar{z} = 0$ を虚軸の方程式と考えてよく，

(3.b.4) の条件の下に，$z + \bar{z} = 0$ を (3.b.2) で移すと，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}} + 2\alpha = 0 \ \wedge \ w \neq 0 \ \wedge \ \alpha \in \mathbb{R} \\ \iff\ & 2\alpha w\overline{w} + w + \overline{w} = 0 \ \wedge \ w \neq 0 \ \wedge \ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(3.b.6)$$

(A) $\alpha = 0$ の場合; (3.b.6) は

$$w + \overline{w} = 0 \ \wedge \ w \neq 0 \qquad \cdots\cdots(3.b.7)$$

と同値となり，点 w は原点を除く虚軸上を動く．

(B) $\alpha \neq 0$ の場合; (3.b.6) は

$$\begin{aligned} & w\overline{w} + \frac{1}{2\alpha}(w + \overline{w}) = 0 \ \wedge \ w \neq 0 \\ \iff\ & \left(w + \frac{1}{2\alpha}\right)\left(\overline{w} + \frac{1}{2\alpha}\right) = \frac{1}{4\alpha^2} \ \wedge \ w \neq 0 \\ \iff\ & \left| w + \frac{1}{2\alpha} \right| = \frac{1}{2|\alpha|} \ \wedge \ w \neq 0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(3.b.8)$$

と同値となり，点 w は中心 $-\dfrac{1}{2\alpha}$，半径 $\dfrac{1}{2|\alpha|}$ の円周上の原点を除く部分を動く．