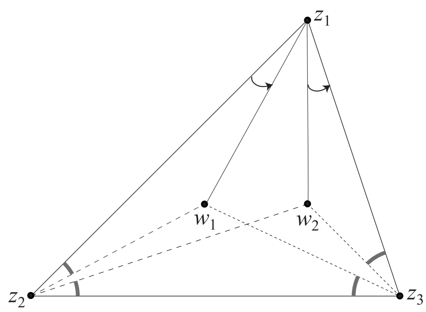
【9.1.a】

3 次方程式 $f(x)=0$ の 3 解を z_1, z_2, z_3，2 次方程式 $f'(x)=0$ の 2 解を w_1, w_2 で表す.
また，複素平面上において 3 点 z_1, z_2, z_3 は三角形を構成するものとする.
2 点 w_1, w_2 が三角形 $z_1z_2z_3$ の内部にあることを前提として，次の関係が成り立つことを示せ.

$$\angle w_1z_1z_2=\angle w_2z_1z_3,\quad \angle w_1z_2z_1=\angle w_2z_2z_3,\quad \angle w_1z_3z_2=\angle w_2z_3z_1 \qquad \cdots\cdots(1.a.1)$$

【解答】　等角共役点



題意より，3 次方程式 $f(x)=0$ の 3 解が z_1, z_2, z_3 であり，
2 次方程式 $f'(x)=0$ の 2 解が w_1, w_2 であるから，

$$\begin{cases} f(x)=a(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3) \quad (a\neq 0) & \cdots\cdots(1.a.2) \\ f'(x)=3a(x-w_1)(x-w_2) \quad (a\neq 0) & \cdots\cdots(1.a.3) \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，$w_1\neq w_2$ であることに注意する.
(1.a.2) を x で微分して (1.a.3) と連立すれば,

$$a(x-z_2)(x-z_3)+a(x-z_1)(x-z_2)+a(x-z_1)(x-z_2)=3a(x-w_1)(x-w_2) \qquad \cdots\cdots(1.a.4)$$

(1.a.4) において $x=z_1$ として,

$$a(z_1-z_2)(z_1-z_3)=3a(z_1-w_1)(z_1-w_2) \iff \frac{z_3-z_1}{w_2-z_1}=3\cdot\frac{w_1-z_1}{z_2-z_1} \qquad \cdots\cdots(1.a.5)$$

ここで，$z_1\neq z_2 \wedge w_2\neq z_1$ である．($\because$ $w_2=z_1$ を仮定すると (1.a.4) が不合理)
(1.a.5) の両辺の argument(偏角) をとり,

$$\begin{aligned} \arg.\frac{z_3-z_1}{w_2-z_1}\equiv \arg.3+\arg.\frac{w_1-z_1}{z_2-z_1} \pmod{2\pi} &\iff \arg.\frac{z_3-z_1}{w_2-z_1}\equiv\arg.\frac{w_1-z_1}{z_2-z_1} \pmod{2\pi} \\ &\iff \angle w_1z_1z_2=\angle w_2z_1z_3 \qquad \cdots\cdots(1.a.6) \end{aligned}$$

同様にして,
(1.a.4) に $x=z_2$ を代入して両辺の偏角をとれば，$\angle w_1z_2z_1=\angle w_2z_2z_3$ $\cdots$(1.a.7) が導かれ,
(1.a.4) に $x=z_3$ を代入して両辺の偏角をとれば，$\angle w_1z_3z_2=\angle w_2z_3z_1$ $\cdots$(1.a.8) が導かれる.

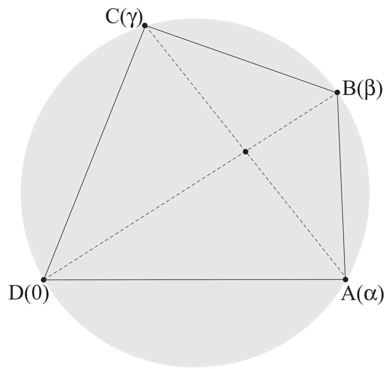
【9.1.b】

四辺形 ABCD に対して，不等式

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}\geq\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} \qquad \cdots\cdots(1.b.1)$$

が成り立つことを示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【解答】 Ptolemy の定理



四辺形 ABCD を複素平面上で考え，

頂点 A, B, C, D に対応する複素数をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, 0$ とする．

このとき，三角不等式により，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}&=|\beta-\alpha||\gamma|+|\gamma-\beta||\alpha|\\&=|\beta\gamma-\gamma\alpha|+|\gamma\alpha-\alpha\beta|\\&\geq|\beta\gamma-\gamma\alpha+\gamma\alpha-\alpha\beta|\\&=|\beta\gamma-\alpha\beta|=|\beta||\gamma-\alpha|=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}\geq\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} \qquad \cdots\cdots(1.b.1)$$

ここで，(1.b.1) の等号成立条件は，

$$\begin{aligned}\arg.(\beta\gamma-\gamma\alpha)\equiv\arg.(\gamma\alpha-\alpha\beta)\pmod{2\pi}&\iff\arg.\frac{\gamma}{\alpha}+\arg.\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\equiv\arg.(-1)\pmod{2\pi}\\&\iff\angle\mathrm{CDA}+\angle\mathrm{CBA}\equiv\pi\pmod{2\pi} \qquad \cdots\cdots(1.b.2)\end{aligned}$$

一般に，四辺形の内角の総和は 2π であるから，

$$0<\angle\mathrm{CDA}+\angle\mathrm{ABC}<2\pi \qquad \cdots\cdots(1.b.3)$$

(1.b.2), (1.b.3) により，

$$\angle\mathrm{CDA}+\angle\mathrm{ABC}=\pi \qquad \cdots\cdots(1.b.4)$$

(1.b.4) により，(1.b.1) の等号成立は四角形 ABCD が円に内接するときに限られる．

[Ptolemy の定理の別証]

反転 $w=1/\bar{z}$ の幾何的性質を用いて，Ptolemy の定理 (前頁 (1.b.1) の等号) を証明する．

(複素) 反転 $T: w=1/z$ は**原点を通る円を原点を通らない直線に移す**ので，

(幾何的) 反転 $T': w=1/\bar{z}$ も**原点を通る円を原点を通らない直線に移す**．

従って，3 点 α, β, γ の反転 T' による像の点を

$$\alpha'\ (=1/\overline{\alpha}),\quad \beta'\left(=1/\overline{\beta}\right),\quad \gamma'\ (=1/\overline{\gamma}) \qquad \cdots\cdots(1.b.5)$$

で表せば，

$$|\alpha'|\,|\alpha|=|\beta'|\,|\beta|=|\gamma'|\,|\gamma|\ (=1) \iff \frac{|\beta|}{|\alpha|}=\frac{|\alpha'|}{|\beta'|}\ \wedge\ \frac{|\gamma|}{|\beta|}=\frac{|\beta'|}{|\gamma'|}\ \wedge\ \frac{|\alpha|}{|\gamma|}=\frac{|\gamma'|}{|\alpha'|} \qquad \cdots\cdots(1.b.6)$$

が成り立つので，

$$\angle\alpha 0\beta=\angle\alpha' 0\beta',\quad \angle\beta 0\gamma=\angle\beta' 0\gamma',\quad \angle\alpha 0\gamma=\angle\alpha' 0\gamma' \qquad \cdots\cdots(1.b.7)$$

に注意すれば，3 つの三角形 $0\alpha\beta$, $0\beta\gamma$, $0\gamma\alpha$ は，

それぞれ三角形 $0\alpha'\beta'$, $0\beta'\gamma'$, $0\gamma'\alpha'$ と相似である (**下図参照**).

$$\therefore\quad \frac{|\beta'-\alpha'|}{|\beta-\alpha|}=\frac{|\beta'|}{|\alpha|}=\frac{1}{|\alpha|\,|\beta|}\ \wedge\ \frac{|\gamma'-\beta'|}{|\gamma-\beta|}=\frac{|\gamma'|}{|\beta|}=\frac{1}{|\beta|\,|\gamma|}\ \wedge\ \frac{|\alpha'-\gamma'|}{|\alpha-\gamma|}=\frac{|\alpha'|}{|\gamma|}=\frac{1}{|\gamma|\,|\alpha|}$$

$$\therefore\quad |\beta'-\alpha'|=\frac{|\beta-\alpha|}{|\alpha|\,|\beta|}\ \wedge\ |\gamma'-\beta'|=\frac{|\gamma-\beta|}{|\beta|\,|\gamma|}\ \wedge\ |\alpha'-\gamma'|=\frac{|\alpha-\gamma|}{|\gamma|\,|\alpha|} \qquad \cdots\cdots(1.b.8)$$

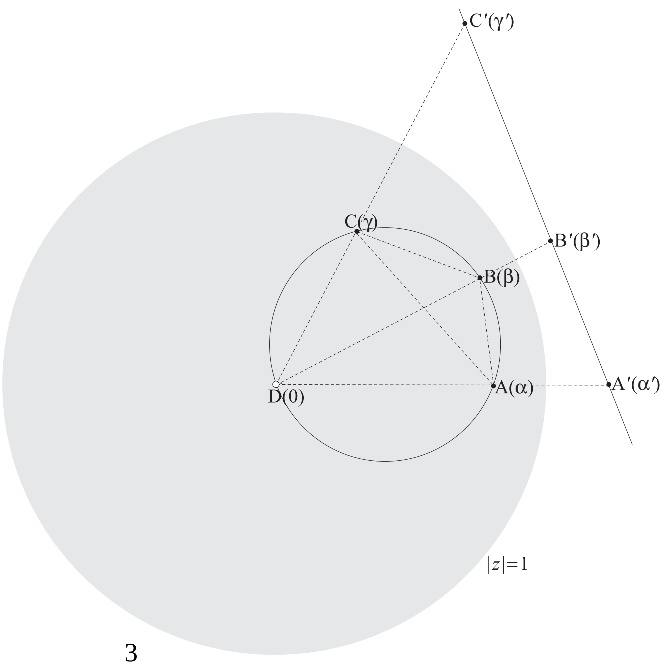
一方，図において，

$$|\gamma'-\alpha'|=|\beta'-\alpha'|+|\gamma'-\beta'| \qquad \cdots\cdots(1.b.9)$$

であるから，(1.b.8), (1.b.9) により，

$$\frac{|\gamma-\alpha|}{|\alpha|\,|\gamma|}=\frac{|\beta-\alpha|}{|\alpha|\,|\beta|}+\frac{|\gamma-\beta|}{|\beta|\,|\gamma|} \iff |\gamma-\alpha|\,|\beta|=|\beta-\alpha|\,|\gamma|+|\gamma-\beta|\,|\alpha|$$

$$\iff \mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} \qquad \cdots\cdots(1.b.10)$$



【9.2】

(1) 複素平面上の直線

$$\mathfrak{L} : \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = \beta \quad (\beta \in \mathbb{R}) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

に関して対称な 2 点 w, w' に対して,

$$w' = \gamma\overline{w} + \delta \quad (\gamma,\ \delta \in \mathbb{C}) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

を満たす γ, δ を α, β の式で表せ.

(2) 2 点 A(1), B$(\sqrt{3}\mathbf{i})$ を通る直線を $\mathfrak{L}$ とする.

点 P(w) と直線 $\mathfrak{L}$ に関して対称な点 Q(w') に対して,

$$w' = \gamma\overline{w} + \delta \quad (\gamma,\ \delta \in \mathbb{C}) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

を満たす複素数 γ, δ を求めよ.

【解答】

(1) 2 点 P(w), Q(w') から等距離にある点の集合 (線分 PQ の垂直二等分線) は,

$$\begin{aligned} |w-z| = |w'-z| &\iff (w-z)(\overline{w}-\overline{z}) = (w'-z)(\overline{w'}-\overline{z}) \\ &\iff (\overline{w}-\overline{w'})z + (w-w')\overline{z} = w\overline{w} - w'\overline{w'} \qquad \cdots\cdots(2.4) \end{aligned}$$

線分 PQ の垂直二等分線 (2.4) が直線 $\mathfrak{L}$ と一致すればよいので,

$$\begin{cases} \alpha = w - w' & \cdots\cdots(2.5) \\ \beta = w\overline{w} - w'\overline{w'} & \cdots\cdots(2.6) \end{cases}$$

(2.5) と (2.5) の共役を (2.6) に代入して,

$$\begin{aligned} \beta = (\alpha + w')\overline{w} - w'(\overline{w} - \overline{\alpha}) &\iff \beta = \alpha\overline{w} + \overline{\alpha}w' \\ &\iff w' = -\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{w} + \frac{\beta}{\overline{\alpha}} \qquad \cdots\cdots(2.7) \end{aligned}$$

(2.7), (2.2) を比較して,

$$\gamma = -\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} \ \wedge \ \delta = \frac{\beta}{\overline{\alpha}} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2) 直線 $\mathfrak{L} : \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = \beta$ が 2 点 A(1), B$(\sqrt{3}\mathbf{i})$ を通るので,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{\alpha}\cdot 1 + \alpha \cdot 1 = \beta \\ \overline{\alpha}\cdot\sqrt{3}\mathbf{i} + \alpha(-\sqrt{3}\mathbf{i}) = \beta \end{cases} &\iff \begin{cases} \overline{\alpha} + \alpha = \beta \\ \overline{\alpha} - \alpha = \dfrac{\beta}{\sqrt{3}\mathbf{i}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \overline{\alpha} = \dfrac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2\sqrt{3}\mathbf{i}}\beta & \cdots\cdots(2.9) \\ \alpha = -\dfrac{1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{2\sqrt{3}\mathbf{i}}\beta & \cdots\cdots(2.10) \end{cases} \end{aligned}$$

(2.9), (2.10) を (1) の γ, δ に代入して,

$$\gamma = -\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} = \frac{1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{1+\sqrt{3}\mathbf{i}} = \frac{-1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{2} \ \wedge \ \delta = \frac{\beta}{\overline{\alpha}} = \frac{2\sqrt{3}\mathbf{i}}{1+\sqrt{3}\mathbf{i}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+\mathbf{i}) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

【9.3】

複素平面上の変換 $T : w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ に関して，次の各問いに答えよ．

(1) 変換 T により，単位円 $|z| = 1$ 上の任意の点はそれ自身に移ることを示せ．

(一般に，変換 T により自分自身に移る点を T の**不動点**という)

(2) 変換 T により，原点を通る任意の直線はそれ自身に移ることを示せ．

(一般に，変換 T により自分自身に移る直線を T の**不動直線**という)

(3) 変換 T により，原点を通らない任意の円は，原点を通らないある円に移ることを示せ．

(4) 変換 T により，単位円 $|z| = 1$ と直交する原点を通らない任意の円は，その円自身に移ることを示せ．

ただし，2 円が直交するとは，2 円の交点においてそれぞれの円の接線が直交することである．

(一般に，変換 T により自分自身に移る円を T の**不動円**という)

【解答】　幾何的反転

(1) 単位円 $|z| = 1$ 上の点 z に対して，

$$w = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} z \iff w = z \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

即ち，単位円 $|z| = 1$ 上の任意の点は不動点であり，

単位円 $|z| = 1$ は変換 T による不動円である．

(2) 実軸を x，虚軸を y として，原点を通る任意の直線は，

$$ax + by = 0 \ \land \ (a, b) \neq (0, 0) \ \land \ a, b \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

と表せる．ここで，$z = x + \mathbf{i}y$ と書けば，

$$\begin{aligned} ax + by = 0 &\iff a \times \frac{z + \overline{z}}{2} + b \times \frac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}} = 0 \\ &\iff (a\mathbf{i} + b)z + (a\mathbf{i} - b)\overline{z} = 0 \\ &\iff (a - b\mathbf{i})z + (a + b\mathbf{i})\overline{z} = 0 \\ &\iff \overline{\alpha} z + \alpha \overline{z} = 0 \ \land \ \alpha = a + b\mathbf{i} \qquad \cdots\cdots(3.3) \end{aligned}$$

(3.3) において，$z = 1/\overline{w}$ とすれば，

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} z + \alpha \overline{z} = 0 \land z \neq 0 &\iff \overline{\alpha} \times \frac{1}{\overline{w}} + \alpha \times \frac{1}{w} = 0 \\ &\iff \overline{\alpha} w + \alpha \overline{w} = 0 \land w \neq 0 \qquad \cdots\cdots(3.4) \end{aligned}$$

(3.3), (3.4) は同一の直線であるから，(3.2) は不動直線である．

ただし，**原点は除外点**として扱う．

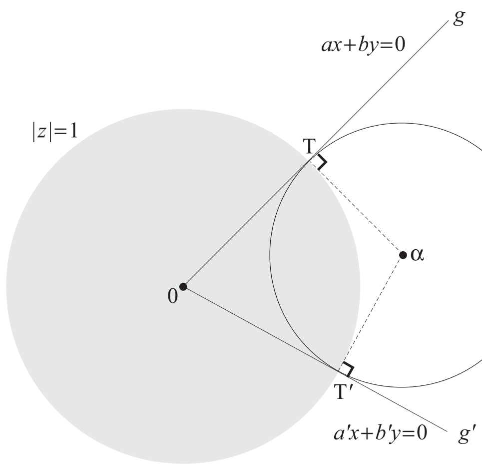
(3) 一般に，中心 α，半径 $r\,(>0)$ の円は $|z-\alpha|=r$ と表され，
(題意の円は) 原点を通らないので，$|\alpha|\neq r$ が成り立つ．
このとき，$|z-\alpha|=r$ において，$z=1/\overline{w}$ とすれば，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\overline{w}}-\alpha\right)\!\left(\frac{1}{w}-\overline{\alpha}\right)=r^2 &\iff (\alpha\overline{w}-1)(\overline{\alpha}w-1)=r^2w\overline{w}\\
&\iff \left(|\alpha|^2-r^2\right)w\overline{w}-\alpha\,\overline{w}-\overline{\alpha}\,w+1=0\\
&\iff w\overline{w}-\frac{\alpha}{|\alpha|^2-r^2}\overline{w}-\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2-r^2}w+\frac{1}{|\alpha|^2-r^2}=0 \quad (\because\ |\alpha|\neq r)\\
&\iff \left(w-\frac{\alpha}{|\alpha|-r^2}\right)\!\left(\overline{w}-\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2-r^2}\right)=\frac{r^2}{\left(|\alpha|^2-r^2\right)^2}\\
&\iff \left|w-\frac{\alpha}{|\alpha|^2-r^2}\right|=\frac{r}{||\alpha|^2-r^2|} \qquad \cdots\cdots(3.5)
\end{aligned}$$

(3.5) において，

$$\frac{|\alpha|}{||\alpha|^2-r^2|}\neq\frac{r}{||\alpha|^2-r^2|} \quad (\because\ |\alpha|\neq r) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

であるから，
(3.5) は中心 $\dfrac{\alpha}{|\alpha|^2-r^2}$，半径 $\dfrac{r}{||\alpha|^2-r^2|}$ の円であり，原点を通らない．
従って，変換 T は原点を通らない円を原点を通らない円に移す．



(4) 右図の様に単位円 $|z|=1$ と直交する円 $\mathfrak{C}$ に対して，原点から 2 接線 $g,\,g'$ を引けば，その接点 T, T′ は単位円との交点に一致する．この接点 T, T′ は単位円周上にあるので，(1) により変換 T により不動である．更に (2) により，その接線 $g,\,g'$ も不動である．また (3) により，$\mathfrak{C}$ は原点を通らない円なので，$\mathfrak{C}$ の像も原点を通らない円である．即ち，円 $\mathfrak{C}$ の変換 T による像の円 $\mathfrak{C}_T$ は，

原点を通らない円であり，
2 直線 $g,\,g'$を接線とし， $\cdots\cdots(3.7)$
その接点が T, T′である

から $\mathfrak{C}$ 自身である．即ち，円 $\mathfrak{C}$ は不動円である．