【8.1】

n はすべての正整数を動くとする．
複素数 $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ に対して，

$$\frac{(1-\alpha^n)(1-\alpha^{2n})(1-\alpha^{3n})(1-\alpha^{4n})(1-\alpha^{5n})}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)}$$

の値を求めよ．

【8.2.a】

複素平面上において，三角形 ABC の頂点を表す複素数 α, β, γ が次の条件を満たす.

$$\text{(A)}\ \ |\alpha-\beta| = |\beta-\gamma| = |\gamma-\alpha| = \sqrt{3} \quad \text{(B)}\ \ \alpha+\beta+\gamma = 3 \quad \text{(C)}\ \ |\alpha\beta\gamma| = 1 \ \wedge\ \Im(\alpha\beta\gamma) > 0$$

ただし，$\Im(z)$ は複素数 z の虚部を表す.

(1) $z = \alpha - 1$ とするとき，β, γ を z の式で表せ.

(2) α, β, γ の偏角を求めよ．ただし，$0^\circ \leq \arg.\alpha \leq \arg.\beta \leq \arg.\gamma < 360^\circ$ とする.

【8.2.b】

0 と異なる 3 点 $z_1,\ z_2,\ z_3$ があり，次の条件を満たしている.

(A) $\arg.z_1 = \arg.z_2 + 120^\circ$

(B) 点 z_3 は 2 点 $z_1,\ z_2$ を通る直線に関して 0 と反対側にある

(C) 三角形 $z_1 z_2 z_3$ は正三角形である

このとき，次の各問いに答えよ.

(1) $\alpha = \cos 60^\circ + \mathbf{i} \sin 60^\circ$ とするとき，

$$\alpha z_1 = p z_1 + q z_2, \quad \alpha z_2 = s z_1 + t z_2$$

を満たす実数 p, q, s, t をそれぞれ $|z_1|,\ |z_2|$ を用いて表せ.

(2) $z_3 = a z_1 + b z_2$ を満たす実数 $a,\ b$ をそれぞれ $|z_1|,\ |z_2|$ を用いて表せ.

【8.3.a】

複素平面上の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する.

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ \ a_2 = \mathbf{i} \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

また, 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する.

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 3 点 b_k $(k = 1, 2, 3)$ は同一円 $\mathfrak{C}$ の周上にあることを示し, その中心と半径を求めよ.

(2) すべての点 b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は円 $\mathfrak{C}$ の周上にあることを示せ.

【8.3.b】

複素平面上の変換

$$w = \frac{1}{z - \alpha} \quad (z \neq \alpha)$$

による実軸の像がある直線になるとき，次の問いに答えよ．

(1) α の満たすべき条件を求めよ． (2) この変換による虚軸の像を求めよ．