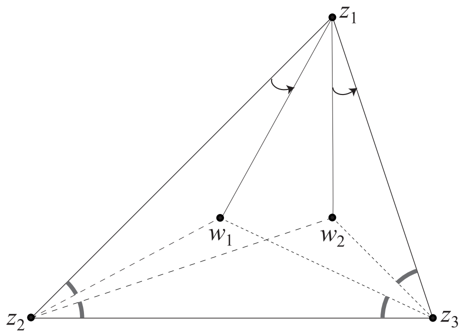
【9.1.a】

3 次方程式 $f(x)=0$ の 3 解を z_1, z_2, z_3，2 次方程式 $f'(x)=0$ の 2 解を w_1, w_2 で表す．
また，複素平面上において 3 点 z_1, z_2, z_3 は三角形を構成するものとする．
2 点 w_1, w_2 が三角形 $z_1z_2z_3$ の内部にあることを前提として，次の関係が成り立つことを示せ．

$$\angle w_1z_1z_2 = \angle w_2z_1z_3, \quad \angle w_1z_2z_1 = \angle w_2z_2z_3, \quad \angle w_1z_3z_2 = \angle w_2z_3z_1$$



【9.1.b】

四辺形 ABCD に対して，不等式

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}\geq\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

が成り立つことを示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【9.2】

(1) 複素平面上の直線

$$\mathfrak{L} : \overline{\alpha} z + \alpha \overline{z} = \beta \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

に関して対称な 2 点 w, w' に対して,

$$w' = \gamma \overline{w} + \delta \quad (\gamma,\ \delta \in \mathbb{C})$$

を満たす γ, δ を α, β の式で表せ.

(2) 2 点 A(1), B$(\sqrt{3}\mathbf{i})$ を通る直線を $\mathfrak{L}$ とする.
点 P(w) と直線 $\mathfrak{L}$ に関して対称な点 Q(w') に対して,

$$w' = \gamma \overline{w} + \delta \quad (\gamma,\ \delta \in \mathbb{C})$$

を満たす複素数 γ, δ を求めよ.

【9.3】

複素平面上の変換 $T : w = \dfrac{1}{\bar{z}}$ に関して，次の各問いに答えよ.

(1) 変換 T により，単位円 $|z| = 1$ 上の任意の点はそれ自身に移ることを示せ.

(一般に，変換 T により自分自身に移る点を T の**不動点**という)

(2) 変換 T により，原点を通る任意の直線はそれ自身に移ることを示せ.

(一般に，変換 T により自分自身に移る直線を T の**不動直線**という)

(3) 変換 T により，原点を通らない任意の円は，原点を通らないある円に移ることを示せ.

(4) 変換 T により，単位円 $|z| = 1$ と直交する原点を通らない任意の円は，その円自身に移ることを示せ.

ただし，2 円が直交するとは，2 円の交点においてそれぞれの円の接線が直交することである.

(一般に，変換 T により自分自身に移る円を T の**不動円**という)