【Example 11.1】
$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{7}+\mathbf{i}\sin\dfrac{2\pi}{7}$ のとき,

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)(1-\alpha^6)$$

の値を求めよ.

Point
$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ $(n\geq 2)$ に対して,

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)\times\cdots\times(x-\alpha^{n-1})$$

$(\because)$ α は 1 の n 乗根 ($x^n=1$ の解) で, その偏角が正で最小なもの.
方程式の左辺を実数係数の範囲で因数分解して,

$$x^n-1=0 \iff (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)=0 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

更に, (1.1) 左辺の第 2 因数を複素係数の範囲まで因数分解して,

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)\times\cdots\times(x-\alpha^{n-1}) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

【解説】

α は 1 の 7 乗根で, その偏角が正で最小なものであるから,
1 の 7 乗根の 6 つの虚数根は,

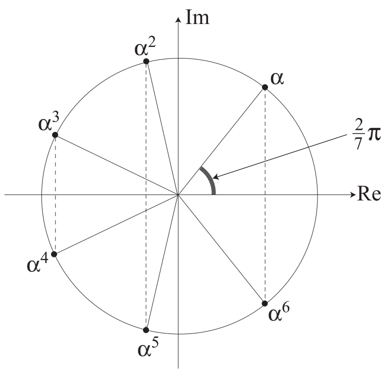
$$\alpha,\ \alpha^2,\ \cdots\cdots,\ \alpha^6$$

と表せるので,

$$x^6+x^5+\cdots\cdots+x+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)\times\cdots\times(x-\alpha^6) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.3) に $x=1$ を代入して,

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\times\cdots\times(1-\alpha^6)=1+1+\cdots\cdots+1=7 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$



Comment

「任意の n 次式は複素係数の範囲で, n 個の 1 次式の積に一意的に表せる」という**因数分解の一意性**を用いている.
また, 1 の n 乗根を

$$\alpha^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$$

で表したとき, $\gcd(n,k)=1$ なる k に対して, α^k を 1 の原始 n 乗根という.
上の例題では, 7 が素数であるので, $\alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^6$ すべてが原始 7 乗根である.

【Review 11.1.1】 97 岡山大

方程式 $x^2-x+1=0$ の解を α, β とする.

(1) α, β を極形式で表し，複素平面上に図示せよ.

(2) α の 3 乗根 α_1, α_2, α_3, β の 3 乗根 β_1, β_2, β_3 を極形式で表し，複素平面上に図示せよ.

(3) ${\alpha_1}^2$, ${\alpha_2}^2$, ${\alpha_3}^2$, ${\beta_1}^2$, ${\beta_2}^2$, ${\beta_3}^2$ の 6 つの複素数を解とする x の 6 次方程式を求めよ.

[答] (3) $x^6-x^3+1=0$

【Review 11.1.2】

$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $(1-\alpha)(1-\alpha^3)(1-\alpha^7)(1-\alpha^9)$ (2) $(1+\alpha)(1+\alpha^3)(1+\alpha^7)(1+\alpha^9)$

(3) $\dfrac{1}{1+\alpha}+\dfrac{1}{1+\alpha^3}+\dfrac{1}{1+\alpha^7}+\dfrac{1}{1+\alpha^9}$

[答] (1) 1 (2) 5 (3) 2

【Review 11.1.3】

n を正の奇数とし，方程式 $x^n-1=0$ の異なる n 個の解を次のように表す.

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_{n-1}$$

このとき，次の問いに答えよ.

(1) 1, ${\alpha_1}^2$, ${\alpha_2}^2$, $\cdots\cdots$, ${\alpha_{n-1}}^2$ は，$x^n-1=0$ の異なる解であることを示せ.

(2) $(\alpha_1+\overline{\alpha_1})(\alpha_2+\overline{\alpha_2})\times\cdots\times(\alpha_{n-1}+\overline{\alpha_{n-1}})$ の値を求めよ.

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{n}\times\cos\dfrac{4\pi}{n}\times\cdots\times\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$ の値を求めよ.

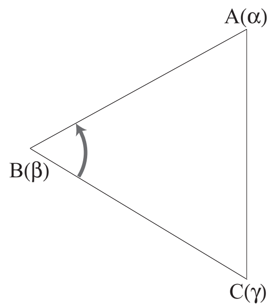
(4) $\sin\dfrac{2\pi}{n}\times\sin\dfrac{4\pi}{n}\times\cdots\times\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$ の値を求めよ.

[答] (2) 1 (3) $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ (4) $\dfrac{n}{(2\mathbf{i})^{n-1}}$

【Example 11.2】
三角形 ABC の外側に BC, AC のそれぞれを 1 辺とする直角二等辺三角形 ACD, BCE を作る.
ただし, $\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{CBE} = 90^\circ$ とする.
DE の中点を M とするとき, 三角形 MAB は直角二等辺三角形であることを示せ.

Point (上図参照)

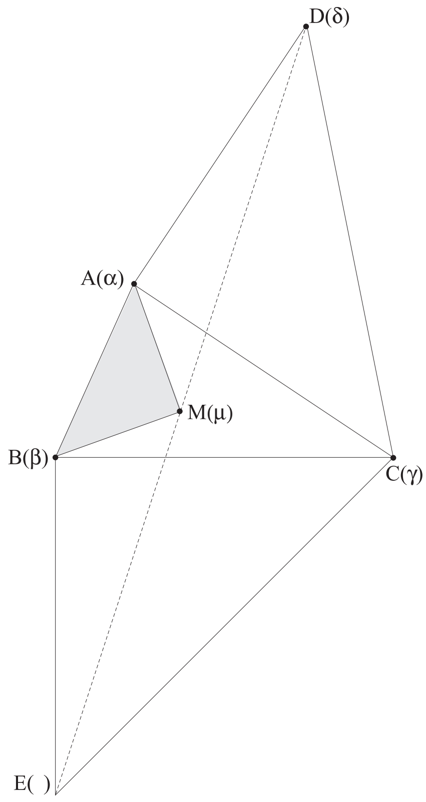
$$\triangle\text{ABC が (左回りの) 正三角形} \iff \alpha-\beta = (\cos 60^\circ + \mathbf{i}\sin 60^\circ)(\gamma-\beta)$$
$$\iff |\alpha-\beta| = |\gamma-\beta| \ \wedge\ \arg.\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = \frac{\pi}{3}$$



【解説】
A(α), B(β), C(γ), D(δ), E(ε), M(μ) とする. (下図参照)

$$\triangle\text{BCE が直角二等辺三角形} \iff \gamma-\beta = (\cos 90^\circ + \mathbf{i}\sin 90^\circ)(\varepsilon-\beta)$$
$$\iff \varepsilon = -\mathbf{i}(\gamma-\beta)+\beta \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

$$\triangle\text{ACD が直角二等辺三角形} \iff \delta-\alpha = (\cos 90^\circ + \mathbf{i}\sin 90^\circ)(\gamma-\alpha)$$
$$\iff \delta = \mathbf{i}(\gamma-\alpha)+\alpha \qquad \cdots\cdots(2.2)$$



(2.1), (2.2) より,

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta+\varepsilon) \iff \mu = \frac{1}{2}\{(1-\mathbf{i})\alpha + (1+\mathbf{i})\beta\} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

A(α) を M(μ) を中心に 90° 回転して,

$$(\cos 90^\circ + \mathbf{i}\sin 90^\circ)(\alpha-\mu) = \frac{1}{2}\{(-1+\mathbf{i})\alpha + (1-\mathbf{i})\beta\} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

また,

$$\beta-\mu = \frac{1}{2}\{(-1+\mathbf{i})\alpha + (1-\mathbf{i})\beta\} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.4), (2.5) より,

$$\beta-\mu = (\cos 90^\circ + \mathbf{i}\sin 90^\circ)(\alpha-\mu)$$
$$\iff \triangle\text{ABM は}\angle\text{AMB} = 90^\circ\text{の直角二等辺三角形} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.6) により題意は示された.

【Review 11.2.1】

平面上に凸四角形 ABCD がある．AB を 1 辺とする正三角形 APB，BC を 1 辺とする正三角形 BQC を四角形 ABCDD の外側に作る．このとき，三角形 DPQ が正三角形であるならば四角形 ABCD は平行四辺形であることを示せ．

[証明略]

【Review 11.2.2】　97 一橋大

複素平面上に 0 と異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 があり，次の条件を満たしている．

(A) 三角形 $z_1z_2z_3$ は正三角形である．

(B) $\arg.z_1 = \arg.z_2 + 120^\circ$ が成り立つ．

(C) 点 z_3 は 2 点 z_1, z_2 を通る直線に関して原点 0 と反対側にある．

(1) $\alpha = \cos 60^\circ + \mathbf{i}\sin 60^\circ$ とするとき，

$$\alpha z_1 = pz_1 + qz_2, \quad \alpha z_2 = sz_1 + tz_2$$

を満たす実数 p, q, s, t をそれぞれ $|z_1|$, $|z_2|$ を用いて表せ．

(2) $z_3 = az_1 + bz_2$ を満たす実数 a, b をそれぞれ $|z_1|$, $|z_2|$ を用いて表せ．

[答] (1) $p = 0,\ q = -\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ s = \dfrac{|z_2|}{|z_1|},\ t = 1$　(2) $a = 1 + \dfrac{|z_2|}{|z_1|},\ b = 1 + \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

【Example 11.3】 97 横浜国大

複素数 z に対して，複素数 w を次の式で定める．

$$w=\frac{z+\alpha}{\beta z+\gamma}\quad(\alpha,\ \beta,\ \gamma : \text{複素定数})$$

ここで，$z=0,\ \mathbf{i},\ -\mathbf{i}$ のとき，w の値はそれぞれ $w=1,\ -1,\ 0$ とする．

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をそれぞれ求めよ．

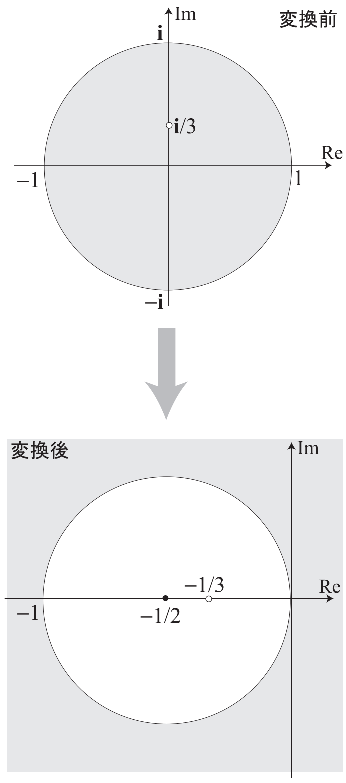
(2) $|z|\leq 1$ を満たして z が動くとき，w の動く領域を複素平面上に図示せよ．

Point

変換 $w=\dfrac{1}{z}$ は**円**を**円**に移す

[Note] この変換による像の図形を変換前の図形の原点を中心とする**鏡像**という．

【解説】



(1) 代入計算により，

$$\alpha=\gamma=\mathbf{i},\ \ \beta=3 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(2) (3.1) より，

$$w=\frac{z+\mathbf{i}}{-3z+\mathbf{i}}\ \wedge\ z\neq\frac{\mathbf{i}}{3} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(3.2) を z について解いて，

$$z=\frac{\mathbf{i}(w-1)}{3w+1}\ \wedge\ w\neq-\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) を $|z|\leq 1$ に代入して，

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathbf{i}(w-1)}{3w+1}\right|\leq 1 &\iff |w-1|\leq|3w+1|\ \wedge\ w\neq-\frac{1}{3}\\ &\iff (w-1)(\overline{w}-1)\leq(3w+1)(3\overline{w}+1)\ \wedge\ w\neq-\frac{1}{3}\\ &\iff w\overline{w}+\frac{1}{2}(\overline{w}+w)\geq 0\ \wedge\ w\neq-\frac{1}{3}\\ &\iff \left(w+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{w}+\frac{1}{2}\right)\geq\frac{1}{4}\ \wedge\ w\neq-\frac{1}{3}\\ &\iff \left|w+\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{2}\ \wedge\ w\neq-\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(3.4)\end{aligned}$$

(3.4) を図示して，右図を得る．

Comment

一般に，1 次分数変換 $w=1/z$ は円を円に移すことから，**円円変換**などと呼ばれる．
この事実を図形 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0\cdots(3.4)$ の像を調べることで確認してみよう．
(3.4) は，$a\neq 0$ ときは円を表し，$a=0$ のときは直線を表す．
更に，$d=0$ のとき原点を通る図形 (円または直線) を表す．
点 $z=x+\mathbf{i}y$ が変換 $w=1/z$ で移る点を $w=u+\mathbf{i}v$ で表す．

$$z=\frac{1}{w}=\frac{1}{|w|^2}\overline{w}\iff x+\mathbf{i}y=\frac{u-\mathbf{i}v}{u^2+v^2}\iff x=\frac{u}{u^2+v^2}\ \wedge\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) を (3.4) に代入して，

$$a\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{(-v)^2}{(u^2+v^2)^2}\right)+b\times\frac{u}{u^2+v^2}+c\times\frac{-v}{u^2+v^2}+d=0\iff d(u^2+v^2)-cv+bu+a=0\qquad\cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) は，$d\neq 0$ のときは円を表し，$d=0$ ときは直線を表す．
更に，$a=0$ のとき原点を通る図形 (円または直線) を表す．
以上の結果を a, d の値で場合に分け表形式で分類すると，

a, d の値	原像 (3.4)	像 (3.6)
$a\neq 0\wedge d\neq 0$	原点 (反転中心) を通らない円	原点 (反転中心) を通らない円
$a=0\wedge d=0$	原点 (反転中心) を通る直線	原点 (反転中心) を通る直線
$a\neq 0\wedge d=0$	原点 (反転中心) を通る円	原点 (反転中心) を通らない直線
$a=0\wedge d\neq 0$	原点 (反転中心) を通らない直線	原点 (反転中心) を通る円

のようになり，直線を半径無限大の円と考えれば，まさに円から円への変換になっていると言える．
このこと (円円対応) は一般の変換

$$w=\frac{cz+d}{az+b}\quad(a,\,b,\,c,\,d:\text{複素定数})\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

についても本質的に同様である．(変換 (3.7) については，次講で更に詳しく扱う.)

【Review 11.3.1】

複素平面上の点 z から w への写像を次の式で定義する.

$$w=\frac{z-2\mathbf{i}}{z+2}\quad (z\neq -2)$$

点 z が次の各図形上を動くとき, w の軌跡を求めて図示せよ.

(1) 原点中心, 半径 1 の円　(2) 中心 $-2+\mathbf{i}$, 半径 1 の円　(3) 虚軸 : $z+\bar{z}=0$　(4) 実軸 : $z-\bar{z}=0$

[答] (1) 中心 $\dfrac{-1-4\mathbf{i}}{3}$, 半径 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ の円
(2) 直線 $u-v+1=0$ $(w=u+\mathbf{i}v)$
(3) 点 1 を除く中心 $\dfrac{1-\mathbf{i}}{2}$, 半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円
(4) 点 1 を除く直線 $u-v-1=0$ $(w=u+\mathbf{i}v)$

【Review 11.3.2】　74 岐阜薬科大

複素平面上において, 点 $z=x+\mathbf{i}y$ $(x, y\in\mathbb{R})$ は直線 $x=a\,(>0)$ 上を動く.
このとき, 点 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ はある円周上を動く. その中心と半径を a の式で表せ.

[答] $\left|w-\dfrac{a}{1+a}\right|=\dfrac{1}{1+a}$

【Review 11.3.3】

複素平面上に原点 O と異なる 2 点 P, Q がある.
点 Q は O を端点とする半直線 OP 上にあり, $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=1$ を満たしている.
(1) $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ とするとき, z, w の関係式を求めよ.
(2) 点 P が $1+\mathbf{i}$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ.
(3) 点 P が原点 O を通るある直線上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ.
(4) 点 P が中心 $\sqrt{2}\alpha$ $(\alpha\neq 0)$, 半径 $|\alpha|$ の円周上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ.

[答] (1) $w=1/\bar{z}$　(2) $|w-(1+\mathbf{i})|=1$(不動円)　(3) 不動直線　(4) $\left|w-\dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha}\right|=\dfrac{1}{|\alpha|}$