【Example 12.1】

各 $z_k,\ {z_k}'\ (k=1,2,3)$ はすべて異なる複素数とする．次を示せ．

$$z_1,\ z_2,\ z_3 \text{ が同一直線上} \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \text{ が実数} \quad \cdots\cdots(1.1)$$

$$\overrightarrow{z_1z_2} \perp \overrightarrow{z_1z_3} \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \text{ が純虚数} \quad \cdots\cdots(1.2)$$

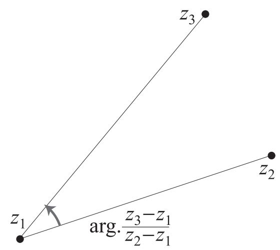
$$\triangle z_1z_2z_3 \backsim \triangle {z_1}'{z_2}'{z_3}' \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{{z_3}'-{z_1}'}{{z_2}'-{z_1}'} \quad \cdots\cdots(1.3)$$

[Note] 特に断らなければ数を複素数の範囲で考える．また，複素平面上で複素数 z が表す点を単に z で表し，複素数と点を同一視する．更に，始点を z_1，終点を z_2 とする vector を $\overrightarrow{z_1z_2}$ で表すことにする．また，純虚数全体の集合を $\mathbb{I}$ で表す．($\mathbb{C}$ は複素数全体の集合，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合であった)

Point

$$\angle z_3z_1z_2 = \arg.\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

[Note] $\angle z_3z_1z_2$ は $\overrightarrow{z_1z_2}$ から $\overrightarrow{z_1z_3}$ に向かって**正の向き**に測る．(右図)



【解説】

$$z_1,\ z_2,\ z_3 \text{ が同一直線上} \iff \angle z_3z_1z_2 = 0,\ \pi$$

$$\iff \arg.\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = 0,\ \pi \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R} \quad \cdots\cdots(1.1)$$

$$\overrightarrow{z_1z_2} \perp \overrightarrow{z_1z_3} \iff \angle z_3z_1z_2 = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \iff \arg.\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{I} \quad \cdots\cdots(1.2)$$

$$\triangle z_1z_2z_3 \backsim \triangle {z_1}'{z_2}'{z_3}' \iff \angle z_3z_1z_2 = \angle {z_3}'{z_1}'{z_2}' \ \land\ \frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|} = \frac{|{z_3}'-{z_1}'|}{|{z_2}'-{z_1}'|}$$

$$\iff \arg.\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \arg.\frac{{z_3}'-{z_1}'}{{z_2}'-{z_1}'} \ \land\ \frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|} = \frac{|{z_3}'-{z_1}'|}{|{z_2}'-{z_1}'|}$$

$$\iff \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{{z_3}'-{z_1}'}{{z_2}'-{z_1}'} \quad \cdots\cdots(1.3)$$

[Note] (1.3) の等式は相似条件**「二辺比挟角相等」**を表す．

【Review 12.1.1】

3 つの異なる複素数 α, β, γ が

$$\alpha^2+3\beta^2+\gamma^2-3\alpha\beta-3\beta\gamma+\gamma\alpha=0$$

を満たすとき，$\triangle\alpha\beta\gamma$ の形状を答えよ.

[答] $\angle\alpha\beta\gamma=120^\circ$ の二等辺三角形

【Review 12.1.2】

3 点 α, β, γ が正三角形を作るための必要十分条件は,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

であることを示せ.

[証明略]

【Review 12.1.3】

3 点 α, β, γ が正三角形を作るための必要十分条件は,

$$\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2=0 \ \vee \ \alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega=0$$

であることを示せ. ここで，ω は 1 の原始 3 乗根の一方である.

[証明略]

【Example 12.2】

(1) 複素平面上の直線の方程式は (2.1) の形式で与えられることを示せ.

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\beta=0 \quad (\alpha\neq 0,\ \alpha\in\mathbb{C},\ \beta\in\mathbb{R}) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(2) 複素平面上の円の方程式は (2.2) の形式で与えられることを示せ.

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\beta=0 \quad (\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\overline{\alpha}-\beta>0) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

【解説】

$z=x+\mathbf{i}y\ (x,\ y\in\mathbb{R})$ と置くと,

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad y=\frac{z-\overline{z}}{2\mathbf{i}}=\frac{-\mathbf{i}(z-\overline{z})}{2} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

と書ける.

(1) 直線の方程式 $ax+by+c=0$ に (2.3) を代入して,

$$a\times\frac{z+\overline{z}}{2}+b\times\frac{-\mathbf{i}(z-\overline{z})}{2}+c=0 \iff \frac{a-\mathbf{i}b}{2}z+\frac{a+\mathbf{i}b}{2}\overline{z}+c=0 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

ここで, $\alpha=a+\mathbf{i}b,\ \beta=2c$ と置けば, (2.4) より,

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\beta=0 \quad (\beta\in\mathbb{R}) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

[Note] 方程式 (2.1) における係数 α は, この直線の法線方向の vector $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ を与える.
また, $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}\,(\in\mathbb{R})$ は, 2 つの vector $\overrightarrow{0z},\ \overrightarrow{0\alpha}$ の内積 (の 2 倍の値) を与える.

(2) 円の方程式 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ に (2.3) を代入して,

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\beta=0 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

更に, (2.2) は,

$$(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=\alpha\overline{\alpha}-\beta \iff |z+\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}-\beta \iff |z+\alpha|=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}-\beta} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

と変形できるので, この円の中心は $(-\alpha)$, 半径は $\sqrt{\alpha\overline{\alpha}-\beta}$ である.
即ち, $\alpha\overline{\alpha}-\beta>0$ が必要である.

Comment

直線と円は最も基本的な図形なので, その方程式は記憶に価する. 違いは 2 次の項 $z\overline{z}$ の有無である.
また, 方程式を導く手法も重要なので, 上の計算の流れを十分理解して貰いたい.

【Review 12.2.1】

複素平面上で次の方程式を満たす点 z が描く図形を求めよ.

(1) $|z+1| = |z+\mathbf{i}|$ (2) $3|z-\mathbf{i}| = |z+\mathbf{i}|$ (3) $m|z-\alpha| = n|z-\beta|$ $(\alpha \neq \beta,\ m > n > 0)$

[答] (3) $\left| z - \dfrac{m^2\alpha - n^2\beta}{m^2 - n^2} \right| = \dfrac{mn}{m^2 - n^2}|\alpha - \beta|$

【Review 12.2.2】

複素平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{P}_0(z_0)$ に対して,

$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = \overline{\alpha}z_0 + \alpha\overline{z_0} \quad (\alpha \neq 0)$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の描く図形について説明せよ.
また, この図形上の点と原点との距離の最小値を求めよ.

[答] $\dfrac{|\overline{\alpha}z_0 + \alpha\overline{z_0}|}{2|\alpha|}$

【Review 12.2.3】 2001 名大

複素平面上の互いに異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一円周上にあるとき,

$$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} \in \mathbb{R}$$

が成り立つことを示せ.

[証明略]

【Example 12.3】
複素数 z から複素数 w への変換 w を

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$$

によって定義する.
このとき, 変換 w は

$$w_1=Az,\quad w_2=z+B,\quad w_3=\frac{1}{z}$$

という形の変換を適当に合成することで得られることを示せ.

【解説】

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{1}{c}\times\frac{(cz+d)a+bc-ad}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

と変形できるので,

$$z\longrightarrow z+\frac{d}{c}\longrightarrow \frac{1}{z+\frac{d}{c}}\longrightarrow \frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\longrightarrow \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

の順序で合成されていると考えられ,

$$z\longrightarrow z+\frac{d}{c}\overset{\text{put}}{=}w_2\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

$$z+\frac{d}{c}\longrightarrow \frac{1}{z+\frac{d}{c}}\overset{\text{put}}{=}w_3\qquad\cdots\cdots(3.3)$$

$$\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\longrightarrow \frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\overset{\text{put}}{=}w_1\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

$$\frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\longrightarrow \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\overset{\text{put}}{=}\widetilde{w_2}\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

で表せば,

$$w=\widetilde{w_2}\circ w_1\circ w_3\circ w_2\qquad\cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) により, 題意は示された.

[Note]　変換 (3.1) は,

$$w-\beta=\gamma\times\frac{1}{z-\alpha}\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

の形に表せる. この (3.7) において,
α を変換前の平面 ($z-pl$) の**反転中心**, β を変換後の平面 ($w-pl$) の**反転中心**という.

Comment

1 次分数変換は複素数の中で最も重要なテーマであり，例題の結論は非常に有用である．即ち，

$$w_1 = Az \text{ は}\textbf{相似拡大}, \quad w_2 = z + B \text{ は}\textbf{平行移動}$$

を意味し，図形的な操作は非常に単純である．
従って，変換の核心部分は，

$$w_3 = \frac{1}{z} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

の逆数を与える変換である．この (3.8) を図形的に考察してみる．
$z = x + \mathbf{i}y\ (x,\, y \in \mathbb{R})$ として，

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathbf{i}y} = \frac{1}{x^2+y^2}(x-\mathbf{i}y) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

(3.9) における，$x - \mathbf{i}y$ の部分，即ち，

$$x + \mathbf{i}y \ \longrightarrow \ x - \mathbf{i}y$$

は点 $z = x + \mathbf{i}y$ を実軸に関して対称に移動する変換を表す．
更に，$\dfrac{1}{x^2+y^2}$ の部分，即ち，

$$x - \mathbf{i}y \ \longrightarrow \ \frac{1}{x^2+y^2}(x-\mathbf{i}y)$$

は点 $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$ を原点を中心にして，

$$\frac{1}{|z|^2} \text{ 倍の拡大 (縮小) 率で}\textbf{相似拡大}$$

することを表している．例えば，
原点からの距離が 2 の点は，原点からの距離が 1/2 の点に，原点からの距離が 1/3 の点は，原点からの距離が 3 の点に移動する．更に，原点からの距離が 1 の点 (単位円周上の点) は移動しない．即ち，**不動点**である．
以上の考察から，変換 (3.8) は，

実軸対称移動と相似拡大の合成

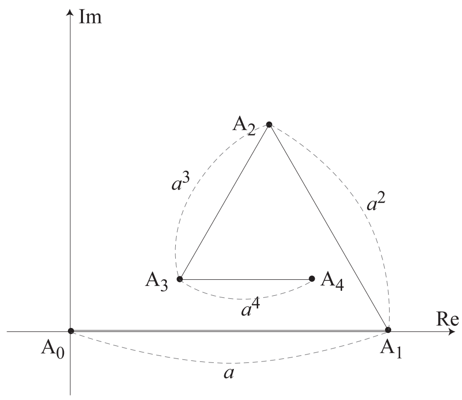
であると理解できる．

【Example 12.4】 92 東工大

$0 < a < 1$ とする.

複素平面上において，原点 A_0 から出発して実軸の正の方向に距離 a 進んだ点を A_1 とする．次に，A_1 で進行方向を反時計回りに $120°$ 回転して，距離 a^2 進んだ点を A_2 とする．以後同様に，点 A_{n-1} で反時計回りに $120°$ 回転して，距離 a^n 進んだ点を A_n とする．このとき，点列 $\{\mathrm{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ の極限の点を求めよ.

【解説】



拡大率 a $(0 < a < 1)$ の拡大と $120°$ の回転を表す複素数を z と置く．即ち, $z = a(\cos 120° + \mathbf{i}\sin 120°)$.

点 A_n に関して,

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n} = \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1} + \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} + \cdots\cdots + \overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$$
$$= a + az + az^2 + \cdots\cdots + az^{n-1} = a \cdot \frac{1-z^n}{1-z} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

ここで,

$$z^n = a^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2n\pi}{3}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (\because\ a^n \to 0) \quad \cdots\cdots(4.2)$$

であるから，極限の点を A_∞ と表せば,

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_\infty} = \lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n} = \frac{a}{1-z} = \frac{a}{1 - a\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$
$$= \frac{a}{\left(1+\frac{a}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}a}{2}\mathbf{i}} = \frac{a\left(1+\frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}a^2}{2}\mathbf{i}}{\left(1+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a(2+a)+\sqrt{3}a^2\mathbf{i}}{2(a^2+a+1)} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

Point

複素数列も**実数列と同様**の計算が可能である.

[Note]

前例題の 1 次分数変換にも繋がる，分数型 2 項間漸化式の解法を確認しておく．
複素数列 $\{z_n\}$ が次の漸化式を満たすとする．

$$z_{n+1} = \frac{rz_n + s}{pz_n + q} \quad (p \neq 0,\ ps - qr \neq 0) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

このとき，(4.4) の特性方程式

$$\lambda = \frac{r\lambda + s}{p\lambda + q} \iff p\lambda^2 + (q - r)\lambda - s = 0 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

の複素数解 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ を用いて，

$$\frac{z_n - \lambda_2}{z_n - \lambda_1} \overset{\text{def}}{=} w_n \quad (\forall n) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

とすれば，

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{z_{n+1} - \lambda_2}{z_{n+1} - \lambda_1} \\ &= \frac{\dfrac{rz_n + s}{pz_n + q} - \lambda_2}{\dfrac{rz_n + s}{pz_n + q} - \lambda_1} = \frac{(r - p\lambda_2)z_n + s - q\lambda_2}{(r - p\lambda_1)z_n + s - q\lambda_1} = \frac{r - p\lambda_2}{r - p\lambda_1} \times \frac{z_n + \dfrac{s - q\lambda_2}{r - p\lambda_2}}{z_n + \dfrac{s - q\lambda_1}{r - p\lambda_1}} = \frac{r - p\lambda_2}{r - p\lambda_1} \times \frac{z_n - \lambda_2}{z_n - \lambda_1} \\ &= \frac{r - p\lambda_2}{r - p\lambda_1} \times w_n \qquad \cdots\cdots(4.7) \end{aligned}$$

ここで，

$$p\lambda^2 + (q - r)\lambda - s = 0 \iff \frac{s - q\lambda}{r - p\lambda} = -\lambda \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

を用いた．
従って，$\{w_n\}$ は公比 $\dfrac{r - p\lambda_2}{r - p\lambda_1}$ の**等比数列**となり，一般項 w_n を表す式と (4.6) により，$\{z_n\}$ の一般項が導ける．

[Note]

特性方程式 (4.5) が重根 λ_0 を持つ場合，

$$\frac{1}{z_n - \lambda_0} \overset{\text{def}}{=} w_n \quad (\forall n) \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

とすれば，$\{w_n\}$ は**等差数列**になることを示せ．

【Review 12.4.1】 99 東大

複素数 z_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を

$$z_1=1,\quad z_{n+1}=(3+4\mathbf{i})z_n+1\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定義する．

(1) すべての正整数 n に対して，

$$\frac{3\cdot 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\frac{5^n}{4}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 実数 $r>0$ に対して，$|z_n|\leqq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ と置くとき，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{\log r}$$

を求めよ．

[答] (2) $\dfrac{1}{\log 5}$

【Review 12.4.2】 2001 東大

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次の式で定義する．

$$z_1=\mathbf{i},\quad z_{n+1}=\frac{1}{z_n}+1\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

(1) すべての正整数 n に対して，点 z_n は複素平面上の円

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

の周上にあることを示せ．

(2) 方程式 $\lambda=\dfrac{1}{\lambda}+1$ の 2 解を λ_1, λ_2 $(\lambda_1<\lambda_2)$ で表し，
数列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$w_n=\frac{z_n-\lambda_2}{z_n-\lambda_1}$$

で定義するとき，一般項 w_n を求めて，

$$\lim_{n\to\infty}z_n$$

を求めよ．

[答] (2) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$