【1.1】 極と極線

(1) 2 次曲線 $\mathfrak{C}:\alpha x^2+\beta y^2=1\ (\alpha\beta\neq 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ における接線の方程式は

$$\alpha x_0 x+\beta y_0 y=1 \qquad \cdots\cdots(1.1.1)$$

で与えられることを示せ.

(2) 曲線 $\mathfrak{C}$ に対して点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ から 2 本の接線が引けるとき，その接点を Q, R とする.
このとき，2 接点を結ぶ直線 QR の方程式は

$$\alpha x_0 x+\beta y_0 y=1 \qquad \cdots\cdots(1.1.2)$$

で与えられることを示せ.

【解答】

(1) 曲線 $\alpha x^2+\beta y^2=1$ の点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ における微分係数は,

$$2\alpha x_0+2\beta y_0\cdot\left.\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\right|_{(x_0,y_0)}=0 \iff \begin{pmatrix}\alpha x_0\\ \beta y_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{d}y/\mathbf{d}x\end{pmatrix}=0 \qquad \cdots\cdots(1.1.3)$$

を満たし，$(\alpha x_0,\beta y_0)$ は点 P における法線 vector を表すので,

$$\begin{pmatrix}\alpha x_0\\ \beta y_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}=0 \iff \alpha x_0 x+\beta y_0 y=1 \quad (\because\ \alpha {x_0}^2+\beta {y_0}^2=1) \qquad \cdots\cdots(1.1.1)$$

即ち，(1.1.1) は P における $\mathfrak{C}$ の接線の方程式を表す.

(2) P から引いた 2 本の接線の接点の座標を

$$\mathrm{Q}(x_1,y_1),\quad \mathrm{R}(x_2,y_2)$$

と表せば，両接線の方程式はそれぞれ

$$\alpha x_1 x+\beta y_1 y=1,\quad \alpha x_2 x+\beta y_2 y=1 \qquad \cdots\cdots(1.1.4)$$

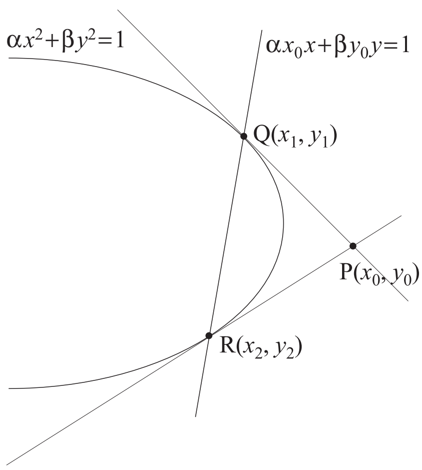
で与えられ，これらの交点が $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ であるから,

$$\alpha x_1 x_0+\beta y_1 y_0=1\ \wedge\ \alpha x_2 x_0+\beta y_2 y_0=1 \qquad \cdots\cdots(1.1.5)$$

が同時に成り立つ.
ここで，(1.1.5) の成立は直線 $\alpha x_0 x+\beta y_0 y=1$ が 2 点 Q, R の双方を通過することを意味するので,

$$\alpha x_0 x+\beta y_0 y=1 \qquad \cdots\cdots(1.1.2)$$

が直線 QR の方程式を表すと考えてよい.



【1.2】 放物線の極線

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ と放物線 $\mathfrak{P}: y^2 = 4px\ (p>0)$ がある.

(1) ${y_0}^2 = 4px_0$ のとき, 点 P における放物線 $\mathfrak{P}$ の接線の方程式は

$$y_0 y = 2p(x+x_0) \qquad \cdots\cdots(1.2.1)$$

で与えられることを示せ.

(2) ${y_0}^2 > 4px_0$ のとき, 点 P から放物線 $\mathfrak{P}$ に引いた 2 本の接線の接点を Q, R とする.
このとき, 直線 QR の方程式は

$$y_0 y = 2p(x+x_0) \qquad \cdots\cdots(1.2.2)$$

で与えられることを示せ.

(3) ${y_0}^2 < 4px_0$ のとき, 点 P を通る 2 本の直線 L_1, L_2 を $\mathfrak{P}$ の対称軸に平行でないように引く.
直線 L_1 と放物線 $\mathfrak{P}$ との交点を A_1, B_1 とし, 直線 L_2 と放物線 $\mathfrak{P}$ との交点を A_2, B_2 とする.
更に, 2 点 A_1, B_1 における接線の交点を Q_1, 2 点 A_2, B_2 における接線の交点を Q_2 とする.
このとき, 直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の方程式は

$$y_0 y = 2p(x+x_0) \qquad \cdots\cdots(1.2.3)$$

で与えられることを示せ.

【解答】

(1) 放物線 $y^2 = 4px$ の点 (x_0, y_0) における微分係数は,

$$2y_0 \cdot \left.\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\right|_{(x_0,y_0)} = 4p \iff \begin{pmatrix} 2p \\ -y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{d}y/\mathbf{d}x \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.2.4)$$

を満たし, $(2p, -y_0)$ は点 P における法線 vector を表すので,

$$\begin{pmatrix} 2p \\ -y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0 \iff y_0 y = 2p(x+x_0) \quad (\because\ {y_0}^2 = 4px_0) \qquad \cdots\cdots(1.2.1)$$

即ち, (1.2.1) は点 P における $\mathfrak{P}$ の接線の方程式を表す.

(2) P から引いた 2 本の接線の接点の座標を

$$\mathrm{Q}(x_1, y_1), \quad \mathrm{R}(x_2, y_2)$$

と表せば, 両接線の方程式はそれぞれ

$$y_1 y = 2p(x+x_1), \quad y_2 y = 2p(x+x_2) \qquad \cdots\cdots(1.2.5)$$

で与えられ, これらの交点が $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ であるから,

$$y_1 y_0 = 2p(x_0+x_1) \ \land\ y_2 y_0 = 2p(x_0+x_2) \qquad \cdots\cdots(1.2.6)$$

が同時に成り立つ.
ここで, (1.2.6) の成立は直線 $y_0 y = 2p(x+x_0)$ が 2 点 Q, R の双方を通過することを意味するので,

$$y_0 y = 2p(x+x_0) \qquad \cdots\cdots(1.2.2)$$

が直線 QR の方程式を表すと考えてよい.

(3) Q_1, Q_2 の座標をそれぞれ

$$\mathrm{Q}_1(x_1, y_1), \quad \mathrm{Q}_2(x_2, y_2)$$

と表せば，Q_1, Q_2 における**極線** L_1, L_2 の方程式は,

$$L_1 : y_1 y = 2p(x + x_1), \quad L_2 : y_2 y = 2p(x + x_2) \qquad \cdots\cdots(1.2.7)$$

であり，これら 2 極線の交点が $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ であるから,

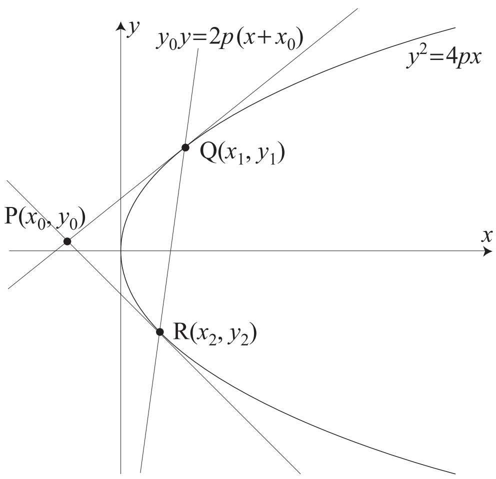
$$y_1 y_0 = 2p(x_0 + x_1) \ \wedge \ y_2 y_0 = 2p(x_0 + x_2) \qquad \cdots\cdots(1.2.8)$$

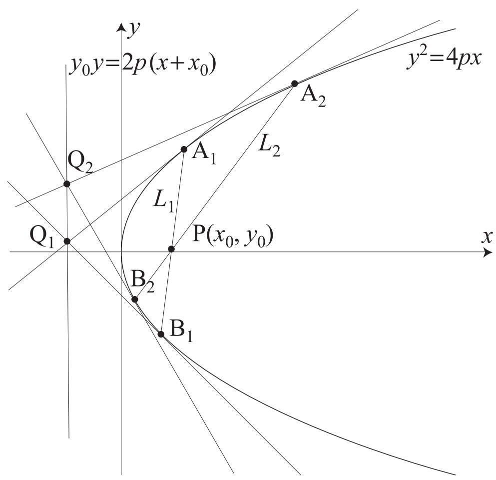
が同時に成り立つ.

ここで，(1.2.8) の成立は直線 $y_0 y = 2p(x + x_0)$ が 2 点 Q_1, Q_2 の双方を同時に通過することを意味するので,

$$y_0 y = 2p(x + x_0) \qquad \cdots\cdots(1.2.3)$$

が直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の方程式を表すと考えてよい.





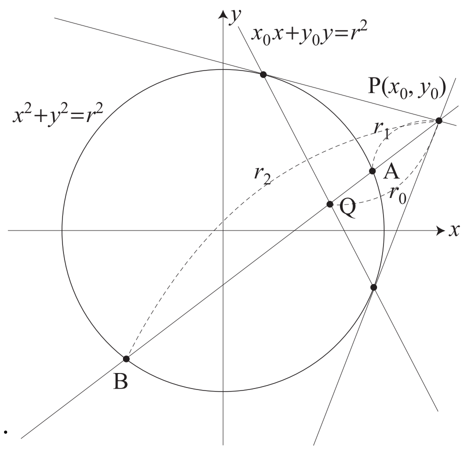
【1.3】 調和共役性

円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ に対して，$\mathfrak{C}$ 外部の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を極とする極線 $\mathfrak{L}: x_0x+y_0y=r^2$ を考える.
点 P を通る円 $\mathfrak{C}$ の任意の割線 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{C}$ との交点を A, B とし，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{L}$ との交点を Q とするとき，

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=\mathrm{QA}:\mathrm{QB} \iff \mathrm{PQ}=\frac{2}{\dfrac{1}{\mathrm{PA}}+\dfrac{1}{\mathrm{PB}}} \qquad \cdots\cdots(1.3.1)$$

が成り立つことを示せ.

【解答】



$\mathrm{PA}=r_1\,(>0)$, $\mathrm{PB}=r_2\,(>0)$, $\mathrm{PQ}=r_0\,(>0)$ と置けば，
(1.3.1) は同値に，

$$\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}=\frac{2}{r_0} \qquad \cdots\cdots(1.3.2)$$

と変形できる.
次に，割線 $\mathfrak{g}$ の方程式を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+R\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.3.3)$$

で表す.
ここで，R は (x_0, y_0) を始点とする**有向線分長**を表す parameter である.
(1.3.3) を円 $\mathfrak{C}$ の方程式 $x^2+y^2=r^2$ に代入して，

$$\begin{aligned} &(x_0+R\cos\theta)^2+(y_0+R\sin\theta)^2=r^2 \\ \iff\ & R^2+2(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)R+{x_0}^2+{y_0}^2-r^2=0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.3.4)$$

この 2 解が $R=r_1,\ r_2$ であるから，解と係数の関係より，

$$r_1+r_2=-2(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)\ \wedge\ r_1r_2={x_0}^2+{y_0}^2-r^2 \qquad \cdots\cdots(1.3.5)$$

このとき，

$$\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}=\frac{-2(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)}{{x_0}^2+{y_0}^2-r^2} \qquad \cdots\cdots(1.3.6)$$

また，(1.3.3) を極線 $\mathfrak{L}$ の方程式 $x_0x+y_0y=r^2$ に代入して，

$$\begin{aligned} &x_0(x_0+R\cos\theta)+y_0(y_0+R\sin\theta)-r^2=0 \\ \iff\ & R=r_0=\frac{-({x_0}^2+{y_0}^2-r^2)}{x_0\cos\theta+y_0\sin\theta} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.3.7)$$

(1.3.6), (1.3.7) より，

$$\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}=\frac{-2(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)}{{x_0}^2+{y_0}^2-r^2}=\frac{2}{r_0} \qquad \cdots\cdots(1.3.2)$$

が導かれる.

【1.4】　方冪

円 $\mathfrak{C}: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$ と点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ に対して,

$$f(\mathrm{P}) = {x_0}^2+{y_0}^2-2ax_0-2by_0+a^2+b^2-r^2 \qquad \cdots\cdots(1.4.1)$$

を点 P における円 $\mathfrak{C}$ の**方冪**という.

(1) $f(\mathrm{P})>0$ のとき,

$$f(\mathrm{P}) = \overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}} \qquad \cdots\cdots(1.4.2)$$

が成り立つことを示せ.

ここで, A, B は円 $\mathfrak{C}$ 外部の点 P を通る任意の割線と $\mathfrak{C}$ との交点である.

(2) $f(\mathrm{Q})<0$ のとき,

$$f(\mathrm{Q}) = \overline{\mathrm{QA}}\times\overline{\mathrm{QB}} \qquad \cdots\cdots(1.4.3)$$

が成り立つことを示せ.

ここで, A, B は円 $\mathfrak{C}$ 内部の点 Q を通る任意の弦と $\mathfrak{C}$ との交点である.

【解答】

(1) $f(\mathrm{P})>0$ のとき, 点 P は円 $\mathfrak{C}$ の外部にあるので,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}} &= \mathrm{PT}^2 && (\because\ \textbf{方冪の定理})\\
&= (x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2 && (\because\ \textbf{三平方の定理})\\
&= {x_0}^2+{y_0}^2-2ax_0-2by_0+a^2+b^2-r^2\\
&= f(\mathrm{P}) && \cdots\cdots(1.4.2)
\end{aligned}$$

(2) 点 $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$ を通る任意の弦 (を含む直線) の方程式は,

その方向 vector を $(\cos\theta, \sin\theta)$, 点 Q を始点とする有向線分長 parameter を t として,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.4.4)$$

(1.4.4) を円 $\mathfrak{C}$ の方程式に代入して,

$$\begin{aligned}
&(x_1+t\cos\theta)^2+(y_1+t\sin\theta)^2-2a(x_1+t\cos\theta)-2b(y_1+t\sin\theta)+a^2+b^2-r^2=0\\
&\iff\ t^2+2((x_1-a)\cos\theta+(y_1-b)\sin\theta)t+{x_1}^2+{y_1}^2-2ax_1-2by_1+a^2+b^2-r^2=0 \qquad \cdots\cdots(1.4.5)
\end{aligned}$$

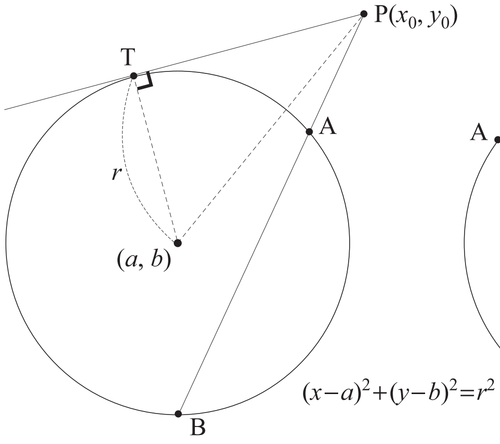
t の 2 次方程式 (1.4.5) の 2 解が

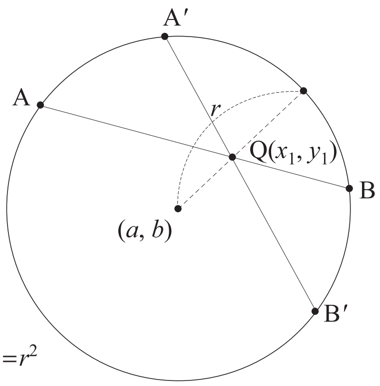
$$(t=)\ \overline{\mathrm{QA}},\quad \overline{\mathrm{QB}} \qquad \cdots\cdots(1.4.6)$$

であるから, 解と係数の関係により,

$$\overline{\mathrm{QA}}\times\overline{\mathrm{QB}} = {x_1}^2+{y_1}^2-2ax_1-2by_1+a^2+b^2-r^2 = f(\mathrm{Q}) \qquad \cdots\cdots(1.4.3)$$

[**図は次頁**]


P(x_0, y_0)
T
A
r
(a, b)
B
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$


A′
A
r
Q(x_1, y_1)
B
(a, b)
B′

【2.1】　楕円の補助円

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

の任意の接線に対して，楕円 $\mathfrak{E}$ の 2 焦点から引いた垂線の足は常にある定円の周上にあることを示せ.

【解答】

楕円 $\mathfrak{E}$ とその接線 $\mathfrak{g} : px + qy + r = 0$ に対して，座標変換

$$x' = x/a \ \wedge \ y' = y/b \qquad \cdots\cdots(2.1.2)$$

を与え，

$$\mathfrak{E}' : (x')^2 + (y')^2 = 1, \quad \mathfrak{g}' : pax' + qby' + r = 0 \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

ここで，$\mathfrak{E}'$ と $\mathfrak{g}'$ が接するための (必要十分) 条件は，

$$\frac{|r|}{\sqrt{a^2p^2 + b^2q^2}} = 1 \iff r = \pm\sqrt{a^2p^2 + b^2q^2} \qquad \cdots\cdots(2.1.4)$$

であるから，接線 $\mathfrak{g}$ の方程式は法線 vector: (p, q) を parameter として，

$$\mathfrak{g} : px + qy \pm \sqrt{a^2p^2 + b^2q^2} = 0 \qquad \cdots\cdots(2.1.5)$$

で与えられる.

一方，$\mathfrak{E}$ の焦点 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ を通り $\mathfrak{g}$ と垂直な直線 $\mathfrak{l}$ は，

$$\mathfrak{l} : q(x \mp \sqrt{a^2 - b^2}) - py = 0 \iff \mathfrak{l} : qx - py \mp q\sqrt{a^2 - b^2} = 0 \qquad \cdots\cdots(2.1.6)$$

で与えられ，題意の垂線の足は (2.1.5) と (2.1.6) の交点であるから，

その交点 (x_0, y_0) は次の 2 式を同時に満たす.

$$\begin{cases} px_0 + qy_0 = \mp\sqrt{a^2p^2 + b^2q^2} & \cdots\cdots(2.1.7) \\ qx_0 - py_0 = \pm q\sqrt{a^2 - b^2} & \cdots\cdots(2.1.8) \end{cases}$$

(2.1.7), (2.1.8) を 2 乗して加えると，

$$(p^2 + q^2)({x_0}^2 + {y_0}^2) = (p^2 + q^2)a^2 \iff {x_0}^2 + {y_0}^2 = a^2 \qquad \cdots\cdots(2.1.9)$$

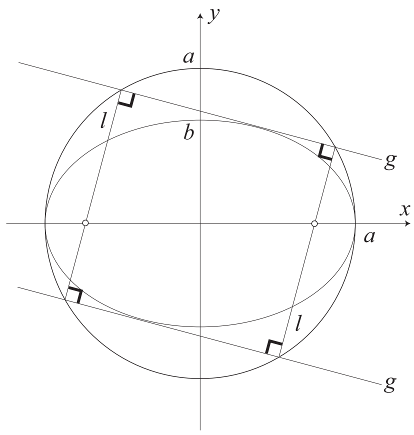
従って，垂線の足は定円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上にある.

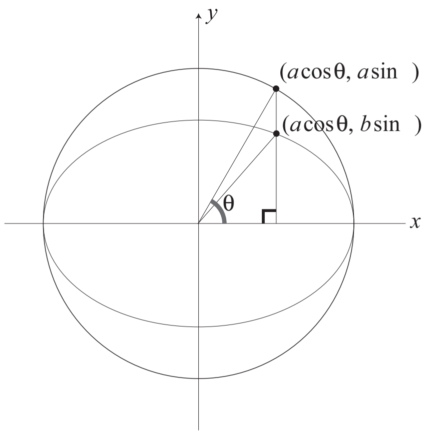
[Note]

楕円 (2.1.1) の parameter 表示 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ における角 θ を表す図形が**補助円**である.
(**右図参照**) また，双曲線

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

の補助円は，$x^2 + y^2 = a^2$





【2.2】 楕円の準円

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \qquad \cdots\cdots(2.2.1)$$

に対して，楕円 $\mathfrak{E}$ の外部の点 P から $\mathfrak{E}$ に引いた 2 本の接線が常に直交するとき，
点 P の軌跡の方程式を求めよ．

【解答】

楕円 $\mathfrak{E}$ とその接線 $\mathfrak{g} : px+qy+r=0$ に対して，
座標変換 $x'=x/a \wedge y'=y/b$ を与え，

$$\mathfrak{E}' : (x')^2+(y')^2=1, \quad \mathfrak{g}' : pax'+qby'+r=0 \qquad \cdots\cdots(2.2.2)$$

ここで，$\mathfrak{E}'$ と $\mathfrak{g}'$ が接するための (必要十分) 条件は，

$$\frac{|r|}{\sqrt{a^2p^2+b^2q^2}}=1 \iff r=\pm\sqrt{a^2p^2+b^2q^2} \qquad \cdots\cdots(2.2.3)$$

であるから，接線 $\mathfrak{g}$ の方程式は，

$$\mathfrak{g} : px+qy\pm\sqrt{a^2p^2+b^2q^2}=0 \qquad \cdots\cdots(2.2.4)$$

このとき，接線 $\mathfrak{g}$ に直交する接線 $\mathfrak{l}$ は，

$$\mathfrak{l} : qx-py\pm\sqrt{a^2q^2+b^2p^2}=0 \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

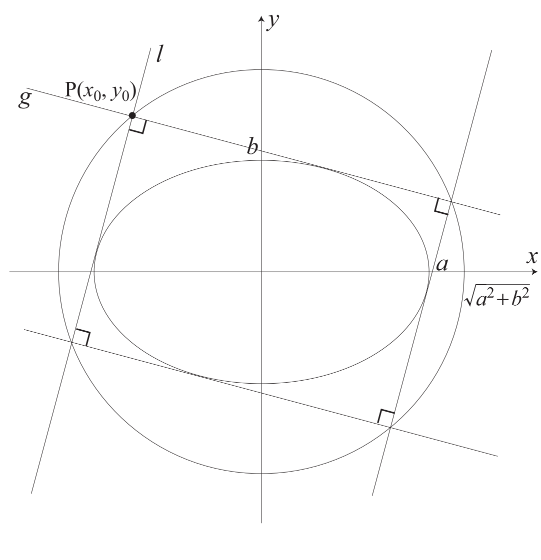
であるから，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{l}$ の交点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は，

$$\begin{cases} px_0+qy_0=\pm\sqrt{a^2p^2+b^2q^2} & \cdots\cdots(2.2.6) \\ qx_0-py_0=\pm\sqrt{a^2q^2+b^2p^2} & \cdots\cdots(2.2.7) \end{cases}$$

を同時に満たす．
(2.2.6), (2.2.7) の 2 乗和をとり p, q を消去して，

$${x_0}^2+{y_0}^2=a^2+b^2 \qquad \cdots\cdots(2.2.8)$$

従って，点 P は円 $\mathfrak{C} : x^2+y^2=a^2+b^2$ 上に存在し,(**必要条件**)
逆に，円 $\mathfrak{C}$ 上の点からは楕円 $\mathfrak{E}$ に常に 2 本の接線が引けるので，点 P は円 $\mathfrak{C}$ 全体を動く.(**十分性**)
以上より，求める点 P の軌跡の方程式は，$x^2+y^2=a^2+b^2$ で与えられる．



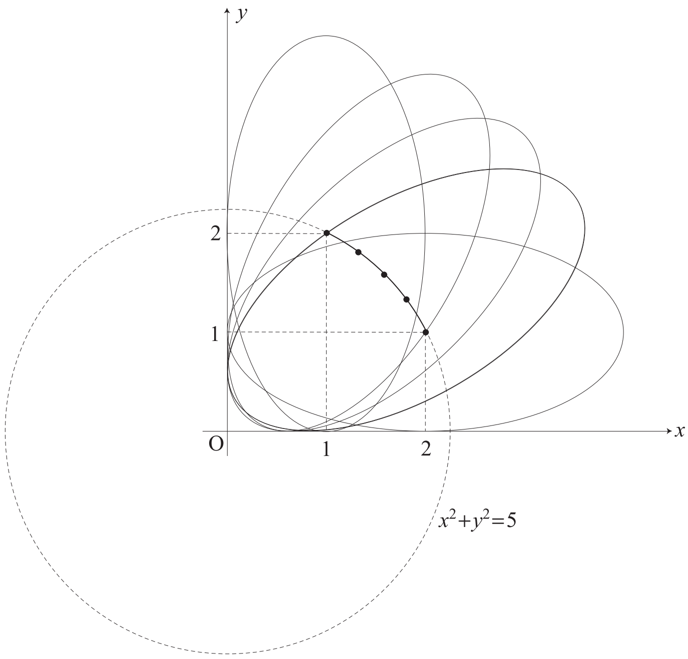
【2.3】 95 慶應義塾

座標 xy 平面の第 1 象限において，長軸の長さ 4，短軸の長さ 2 の楕円が x 軸，y 軸の両座標軸に接しながら可能なすべての範囲を動くとき，この楕円の中心の描く軌跡の方程式を求めよ．

【解答】

一般に，楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ に引ける直交 2 接線の交点の軌跡は，$x^2+y^2=a^2+b^2$ で与えられる準円であるから，題意の楕円 $\mathfrak{E}$ に接する x, y 両座標軸の交点である原点 O は，$\mathfrak{E}$ の準円上にあり，従って，$\mathfrak{E}$ の中心との距離を $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ に保って存在している．即ち，両座標軸に接しながら移動する楕円 $\mathfrak{E}$ の中心は，円 $x^2+y^2=(\sqrt{5})^2$ 上を移動し，その移動範囲は**下図**より，$1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2$ である．以上より，求める軌跡は，

$$x^2+y^2=5 \ \wedge \ 1 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 2$$



【3.1】 双曲線の準円

双曲線

$$\mathfrak{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \qquad \cdots\cdots(3.1.1)$$

に対して，点 P から $\mathfrak{H}$ に引いた 2 本の接線が直交するとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ．

【解答】

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通る直線 $y = m(x - x_0) + y_0$ が双曲線 $\mathfrak{H}$ に接するための条件は，
2 図形の方程式を連立して得られる x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} &b^2x^2 - a^2\{m(x - x_0) + y_0\}^2 - a^2b^2 = 0 \\ &\iff (b^2 - a^2m^2)x^2 + 2a^2m(mx_0 - y_0)x - a^2m^2{x_0}^2 + 2a^2mx_0y_0 - a^2{y_0}^2 - a^2b^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(3.1.2) \end{aligned}$$

の判別式 D_1 に対して，

$$\begin{cases} b^2 - a^2m^2 \neq 0 & \cdots\cdots(3.1.3) \\ \mathrm{D}_1/4 = 0 & \cdots\cdots(3.1.4) \end{cases}$$

が成り立つことが必要十分である．
このとき，(3.1.4) を同値変形して，

$$\begin{aligned} &a^4m^2(mx_0 - y_0)^2 - (b^2 - a^2m^2)(-a^2m^2{x_0}^2 + 2a^2mx_0y_0 - a^2{y_0}^2 - a^2b^2) = 0 \\ &\iff ({x_0}^2 - a^2)m^2 - 2x_0y_0m + {y_0}^2 + b^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(3.1.5) \end{aligned}$$

ここで，(3.1.5) が $m = \pm b/a$ を解に持つ条件は，

$$({x_0}^2 - a^2)\frac{b^2}{a^2} - 2x_0y_0\left(\pm\frac{b}{a}\right) + {y_0}^2 + b^2 = 0 \iff (bx_0 \mp ay_0)^2 = 0 \iff \frac{y_0}{x_0} = \pm\frac{b}{a} \qquad \cdots\cdots(3.1.6)$$

従って，

$$\frac{y_0}{x_0} \neq \pm\frac{b}{a} \qquad \cdots\cdots(3.1.7)$$

であることが必要．
(3.1.7) の条件の下に題意の 2 接線は直交するので，
2 接線の傾きを表す (3.1.5) の 2 解 m_1, m_2 に対して，

$$\begin{aligned} m_1 \times m_2 = -1 &\iff {x_0}^2 - a^2 \neq 0 \ \land\ \frac{{y_0}^2 + b^2}{{x_0}^2 - a^2} = -1 \\ &\iff {x_0}^2 - a^2 \neq 0 \ \land\ {x_0}^2 + {y_0}^2 = a^2 - b^2 \qquad \cdots\cdots(3.1.8) \end{aligned}$$

が成り立つ．
このとき，(3.1.6), (3.1.8) により，

$$\frac{y_0}{x_0} \neq \pm\frac{b}{a} \ \land\ x_0 \neq \pm a \ \land\ {x_0}^2 + {y_0}^2 = a^2 - b^2 \qquad \cdots\cdots(3.1.9)$$

従って，点 P は円 $\mathfrak{C}: x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 上の漸近線 $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ との交点を除く部分に存在する．**(必要条件)**

逆に，点 P が円 $\mathfrak{C}$ 上に存在するとき，即ち，$(x_0, y_0) = (\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta, \sqrt{a^2-b^2}\sin\theta)$ のとき，接線の傾き m の満たす 2 次方程式 (3.1.5) の判別式 D_2 に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_2/4 &= {x_0}^2{y_0}^2 - ({x_0}^2 - a^2)({y_0}^2 + b^2)\\ &= (a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta - ((a^2-b^2)\cos^2\theta - a^2)((a^2-b^2)\sin^2\theta + b^2)\\ &= (a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta + (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2\ (>0)\\ &= a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta > 0 \qquad \cdots\cdots(3.1.10)\end{aligned}$$

が成り立つので，円 $\mathfrak{C}$ の点 P から常に 2 接線が引け，(3.1.8) により，その 2 接線は直交する.(**十分性**)
以上により，求める点 P の軌跡は，

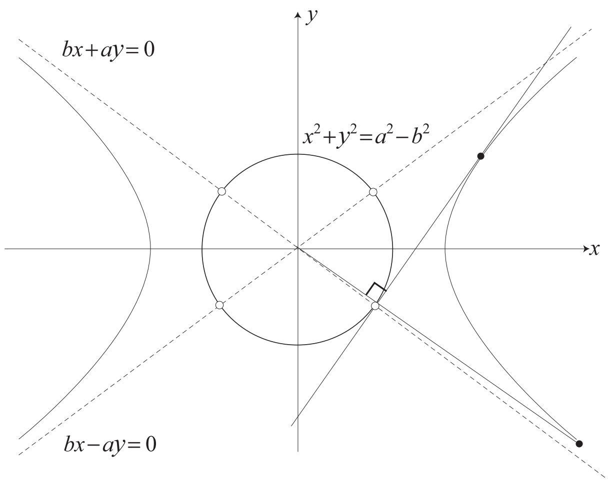
$$x^2+y^2=a^2-b^2 \ \wedge\ (x,y) \neq \left(\pm\sqrt{\frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}}, \pm\sqrt{\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}}\right) \quad (\textbf{複号任意})$$

[Note]

準円 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 上の点 P が，
領域 $-(bx)/a < y < (bx)/a$ にあるとき，
$\mathfrak{H}$ の $a \leq x$ の部分に直交する 2 接線が引け，
領域 $(bx)/a < y < -(bx)/a$ にあるとき，
$\mathfrak{H}$ の $x \leq -a$ の部分に直交する 2 接線が引ける.
また，点 P が領域

$$bx-ay<0<bx+ay \quad \vee \quad bx-ay>0>bx+ay$$

にあるとき，双曲線 $\mathfrak{H}$ の $a \leq x$ の部分と $x \leq -a$ の部分に接線が 1 本ずつ引け，それらは直交する.



【3.2】 95 東大

(1) 双曲線

$$\mathfrak{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0) \qquad \cdots\cdots(3.2.1)$$

上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線が 2 本の漸近線と交わる点を A, B とする.

このとき，点 P は線分 AB の中点であることを示せ.

(2) (1) の P, A, B に対して，三角形 OAB の面積は点 P の位置に無関係に一定であることを示せ.

【解答】

(1) 座標変換 $x/a = x'$, $y/b = y'$ により，双曲線 (3.2.1) とその漸近線 $\mathfrak{g}$ は,

$$\begin{cases} \mathfrak{H}' : (x')^2 - (y')^2 = 1 & \cdots\cdots(3.2.2) \\ \mathfrak{g}' : y' = \pm x' & \cdots\cdots(3.2.3) \end{cases}$$

に移り，更に，点 $\mathrm{P}'(x_0{}', y_0{}')$ として，P' における $\mathfrak{H}'$ の接線は,

$$x_0{}'x' - y_0{}'y' = 1 \qquad \cdots\cdots(3.2.4)$$

で与えられる.

このとき，接線 (3.2.4) と漸近線 (3.2.3) の交点を A', B' とすれば,

$$x_0{}'x' - y_0{}'(\pm x') = 1 \iff x' = \frac{1}{x_0{}' \mp y_0{}'}$$

より,

$$\mathrm{A}'\left(\frac{1}{x_0{}' - y_0{}'},\ \frac{1}{x_0{}' - y_0{}'}\right), \quad \mathrm{B}'\left(\frac{1}{x_0{}' + y_0{}'},\ -\frac{1}{x_0{}' + y_0{}'}\right) \qquad \cdots\cdots(3.2.5)$$

この 2 点 A', B' の中点は,

$$\left(\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x_0{}' - y_0{}'} + \frac{1}{x_0{}' + y_0{}'}\right\},\ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x_0{}' - y_0{}'} - \frac{1}{x_0{}' + y_0{}'}\right\}\right)$$
$$= \left(\frac{2x_0{}'}{2((x_0{}')^2 - (y_0{}')^2)},\ \frac{2y_0{}'}{2((x_0{}')^2 - (y_0{}')^2)}\right) = \mathrm{P}'(x_0{}',\ y_0{}') \qquad \cdots\cdots(3.2.6)$$

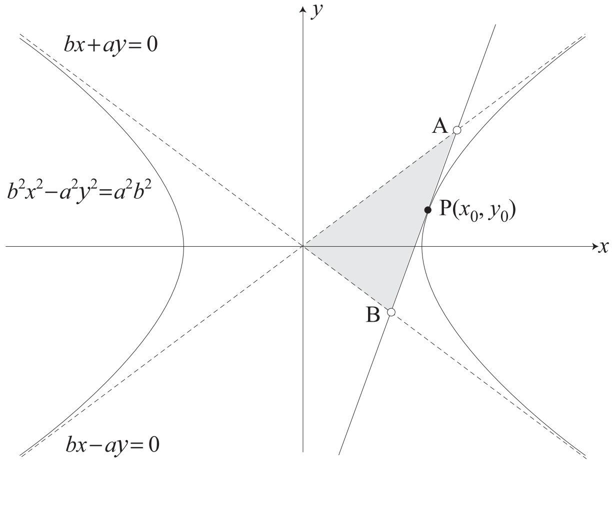
従って，線分 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ の中点が接点 P' であるから，変換前の平面において，線分 AB の中点は接点 P である.

(2) (3.2.5) より,

$$\triangle \mathrm{OA}'\mathrm{B}' = \frac{1}{2}\left| -\frac{1}{x_0{}' - y_0{}'} \times \frac{1}{x_0{}' + y_0{}'} - \frac{1}{x_0{}' + y_0{}'} \times \frac{1}{x_0{}' - y_0{}'} \right| = \left| \frac{1}{(x_0{}')^2 - (y_0{}')^2} \right| = 1$$

従って,

$$\triangle \mathrm{OAB} = ab\,(\mathit{Constant})$$



【3.3】 2000 お茶の水女子大

双曲線

$$\mathfrak{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \qquad \cdots\cdots(3.3.1)$$

上の点 P における接線が $\mathfrak{H}$ の漸近線 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ と交わる点をそれぞれ P_1, P_2 とする.

更に, $\mathfrak{H}$ 上の点 $\mathrm{Q}(\neq \mathrm{P})$ における接線と $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ との交点をそれぞれ Q_1, Q_2 とするとき,

$$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2 \ /\!/ \ \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1 \qquad \cdots\cdots(3.3.2)$$

が成り立つことを示せ.

【解答】

座標変換 $x/a=x'$, $y/b=y'$ により, 双曲線 (3.3.1) とその漸近線 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ は,

$$\begin{cases} \mathfrak{H}' : (x')^2-(y')^2=1 & \cdots\cdots(3.3.3) \\ \mathfrak{g}_1{}' : y'=x',\ \ \mathfrak{g}_2{}' : y'=-x' & \cdots\cdots(3.2.4) \end{cases}$$

に移る.

更に, 点 $\mathrm{P}'(x_1{}', y_1{}')$, $\mathrm{Q}'(x_2{}', y_2{}')$ における $\mathfrak{H}'$ の接線はそれぞれ,

$$\mathfrak{l}_1{}' : x_1{}'x'-y_1{}'y'=1, \quad \mathfrak{l}_2{}' : x_2{}'x'-y_2{}'y'=1 \qquad \cdots\cdots(3.3.5)$$

で与えられるので,

$\mathfrak{l}_1{}'$ と $\mathfrak{g}_1{}'$, $\mathfrak{g}_2{}'$ との交点 $\mathrm{P}_1{}'$, $\mathrm{P}_2{}'$ および $\mathfrak{l}_2{}'$ と $\mathfrak{g}_1{}'$, $\mathfrak{g}_2{}'$ との交点 $\mathrm{Q}_1{}'$, $\mathrm{Q}_2{}'$ はそれぞれ

$$\mathrm{P}_1{}'\left(\frac{1}{x_1{}'-y_1{}'}, \frac{1}{x_1{}'-y_1{}'}\right), \quad \mathrm{P}_2{}'\left(\frac{1}{x_1{}'+y_1{}'}, -\frac{1}{x_1{}'+y_1{}'}\right)$$

$$\mathrm{Q}_1{}'\left(\frac{1}{x_2{}'-y_2{}'}, \frac{1}{x_2{}'-y_2{}'}\right), \quad \mathrm{Q}_2{}'\left(\frac{1}{x_2{}'+y_2{}'}, -\frac{1}{x_2{}'+y_2{}'}\right)$$

と表される.

このとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1{}'\mathrm{Q}_2{}'}=\frac{1}{(x_1{}'-y_1{}')(x_2{}'+y_2{}')}\begin{pmatrix} x_1{}'-y_1{}'-x_2{}'-y_2{}' \\ -x_1{}'+y_1{}'-x_2{}'-y_2{}' \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.3.6)$$

であり, 更に,

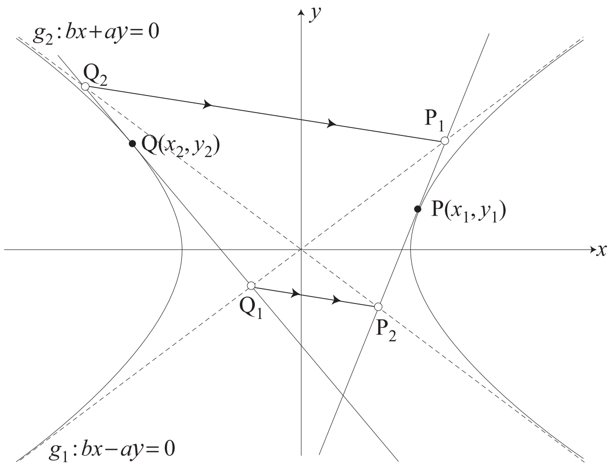
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_2{}'\mathrm{Q}_1{}'}=\frac{1}{(x_1{}'+y_1{}')(x_2{}'-y_2{}')}\begin{pmatrix} x_1{}'+y_1{}'-x_2{}'+y_2{}' \\ x_1{}'+y_1{}'+x_2{}'-y_2{}' \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.3.7)$$

であるから,

$$\begin{aligned} &\frac{x_1{}'-y_1{}'-x_2{}'-y_2{}'}{(x_1{}'-y_1{}')(x_2{}'+y_2{}')}\times\frac{x_1{}'+y_1{}'+x_2{}'-y_2{}'}{(x_1{}'+y_1{}')(x_2{}'-y_2{}')}-\frac{-x_1{}'+y_1{}'-x_2{}'-y_2{}'}{(x_1{}'-y_1{}')(x_2{}'+y_2{}')}\times\frac{x_1{}'+y_1{}'-x_2{}'+y_2{}'}{(x_1{}'+y_1{}')(x_2{}'-y_2{}')} \\ &\qquad=\frac{\{(x_1{}'-y_2{}')-(x_2{}'+y_1{}')\}\{(x_1{}'-y_2{}')+(x_2{}'+y_1{}')\}}{(x_1{}'-y_1{}')(x_1{}'+y_1{}')\times(x_2{}'-y_2{}')(x_2{}'+y_2{}')} \\ &\qquad\qquad-\frac{\{-(x_1{}'+y_2{}')-(x_2{}'-y_1{}')\}\{(x_1{}'+y_2{}')-(x_2{}'-y_1{}')\}}{(x_1{}'-y_1{}')(x_1{}'+y_1{}')\times(x_2{}'-y_2{}')(x_2{}'+y_2{}')} \\ &=(x_1{}'-y_2{}')^2-(x_2{}'+y_1{}')^2+(x_1{}'+y_2{}')^2-(x_2{}'-y_1{}')^2 \\ &\qquad=2\{(x_1{}')^2-(y_1{}')^2\}-2\{(x_2{}')^2-(y_2{}')^2\}=2-2=0 \qquad \cdots\cdots(3.3.8) \end{aligned}$$

従って, (3.3.8) により,

$$\mathrm{P}_1{}'\mathrm{Q}_2{}' \ /\!/ \ \mathrm{P}_2{}'\mathrm{Q}_1{}' \iff \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2 \ /\!/ \ \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1 \qquad \cdots\cdots(3.3.2)$$



$g_2 : bx+ay=0$
y
Q_2
P_1
$Q(x_2, y_2)$
$P(x_1, y_1)$
x
Q_1
P_2
$g_1 : bx-ay=0$

【4.3】 93 名古屋市大

定点 $\mathrm{C}(0, a)$ $(a>0)$ を通る直線と楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0) \qquad \cdots\cdots(4.3.1)$$

との交点を P, Q とするとき，線分 PQ の中点 R の描く軌跡の方程式を求めよ．

【解答】

楕円 (4.3.1) を単位円

$$(x')^2+(y')^2=1 \qquad \cdots\cdots(4.3.2)$$

に移す変換 $x/a=x'$, $y/b=y'$ により，点 $\mathrm{C}(0, a)$ は,

$$\mathrm{C}'(0, a/b) \qquad \cdots\cdots(4.3.3)$$

に移る．

点 C′ を通る直線と単位円 (4.3.2) との交点 P′, Q′ の中点 R′ は,

2 定点 O, C′ から見込む角 $\angle \mathrm{C'R'O}$ を常に一定値 90° に保ちながら移動する．

従って，点 R′ の軌跡は，2 点 O, C′ を直径の両端とする円 (の一部) であり,

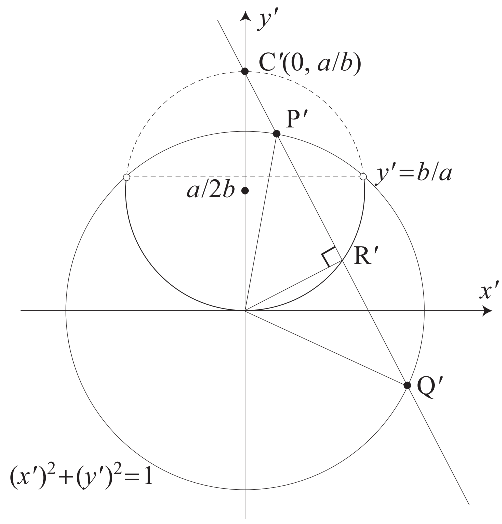
その方程式は,

$$(x')^2+\left(y'-\frac{a}{2b}\right)^2=\left(\frac{a}{2b}\right)^2 \ \wedge\ y'\leqq\frac{b}{a} \qquad \cdots\cdots(4.3.4)$$

で与えられるので，求めるべき点 R の軌跡は,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{a}{2b}\right)^2=\left(\frac{a}{2b}\right)^2 \ \wedge\ \frac{y}{b}\leqq\frac{b}{a}$$

$$\iff \frac{x^2}{\frac{a^4}{4b^2}}+\frac{(y-a/2)^2}{\frac{a^2}{4}}=1 \ \wedge\ y\leqq\frac{b^2}{a} \qquad \cdots\cdots(4.3.5)$$



【4.4】 90 東大

座標平面上の円 C_0 と楕円 C_1 を

$$C_0 : x^2 + y^2 = 1, \qquad C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0) \qquad \cdots\cdots (4.4.1)$$

として定義するとき，C_1 上の任意の点 P に対して，
P を頂点に持ち，C_0 に外接して C_1 に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を a, b の式で表せ．

【解答】

(単位) 円 C_0 に外接する平行四辺形は菱形である．
この菱形と単位円 C_0 および楕円 C_1 を座標変換 $x/a = x'$, $y/b = y'$ で移した図形は，
それぞれ長方形，楕円 $C_0{}'$，単位円 $C_1{}'$ である．($\because$ 円に内接する平行四辺形は長方形に限られる.)
ここで，各図形は，

$$\begin{cases} C_0{}' : \dfrac{(x')^2}{(1/a)^2} + \dfrac{(y')^2}{(1/b)^2} = 1 & \cdots\cdots (4.4.2) \\ C_1{}' : (x')^2 + (y')^2 = 1 & \cdots\cdots (4.4.3) \end{cases}$$

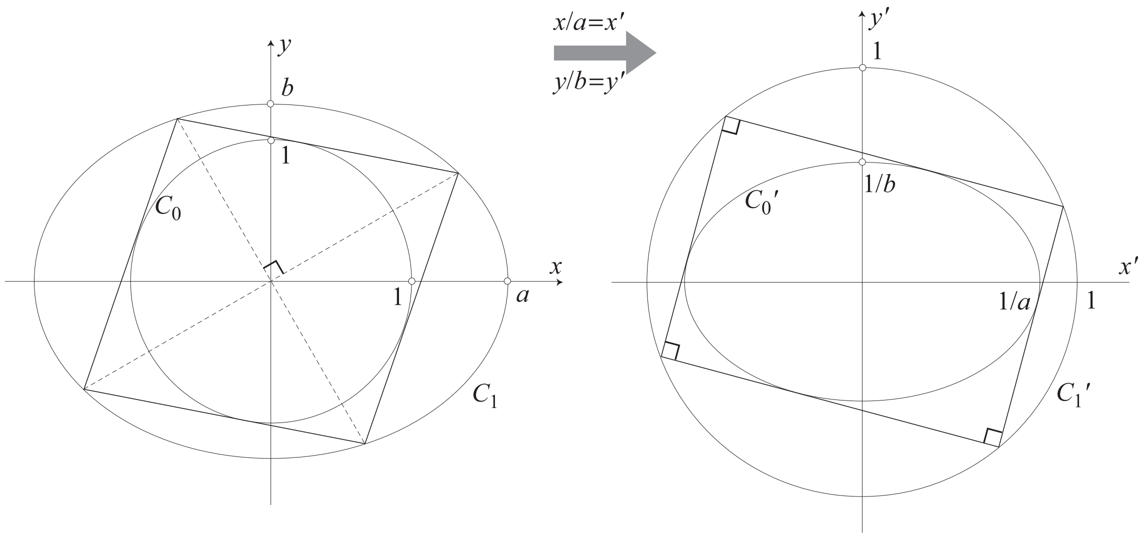
と表示される．
この長方形の各隣接辺は，内接させる楕円 $C_0{}'$ の直交する 2 接線になっているので，
長方形の各頂点は楕円 $C_0{}'$ の準円上に常に存在し，その準円の方程式は，

$$(x')^2 + (y')^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \qquad \cdots\cdots (4.4.4)$$

で与えらる．
この準円 (4.4.4) が単位円 $C_1{}'$ に一致するための必要十分条件は，

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \qquad \cdots\cdots (4.4.5)$$

であり，求めるべき a, b の (必要十分) 条件である．



【5.1】

放物線 $\mathfrak{P}: x^2 = 4py\ (p > 0)$ に対して，$\mathfrak{P}$ 上にない点 P から引いた 2 本の接線が直交する．
このとき，点 P の描く軌跡の方程式を求め，それが放物線 $\mathfrak{P}$ の準線 $y = -p$ であることを示せ．

【解答】

$\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通る直線 $y = m(x - x_0) + y_0$ が放物線 $x^2 = 4py$ と接するためには，
2 図形の方程式を連立して得られる x の 2 次方程式

$$x^2 = 4p\{m(x - x_0) + y_0\} \iff x^2 - 4pmx + 4p(mx_0 - y_0) = 0 \qquad \cdots\cdots(5.1.1)$$

の判別式 D_1 に対して，

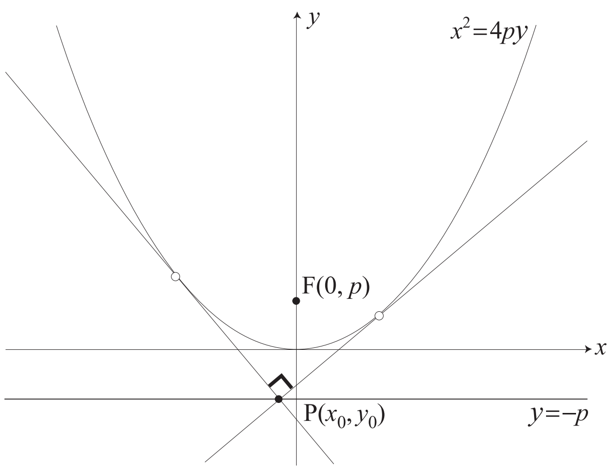
$$\begin{aligned} p \neq 0 \ \wedge\ \mathrm{D}_1/4 = 0 &\iff p \neq 0 \ \wedge\ 4p(pm^2 - x_0 m + y_0) = 0 \\ &\iff m^2 - \frac{x_0}{p}m + \frac{y_0}{p} = 0 \quad (\because\ p > 0) \qquad \cdots\cdots(5.1.2) \end{aligned}$$

が成り立つことが必要十分である．
ここで，(5.1.2) の 2 解 m_1, m_2 が題意の 2 接線の傾きを表すためには，
(5.1.2) の判別式 D_2 に対して，

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_2 > 0 \ \wedge\ m_1 \times m_2 = -1 &\iff \frac{{x_0}^2 - 4py_0}{p^2} > 0 \ \wedge\ \frac{y_0}{p} = -1 \\ &\iff \begin{cases} {x_0}^2 > 4py_0 & \cdots\cdots(5.1.3) \\ y_0 = -p & \cdots\cdots(5.1.4) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つことが必要十分である．
(5.1.4) により，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は放物線 $\mathfrak{P}$ の準線 $y = -p$ 上にあり，(**必要条件**)
準線上の点はすべて領域 $x^2 > 4py$ 内にあるので，
(5.1.3) により，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は準線 $y = -p$ 上をくまなく動く．(**十分性**)
従って，求める点 P の軌跡は，

$$y = -p \ \ (-\infty < x < \infty)$$



【5.2】

放物線 $y=ax^2\,(a>0)$ に対して，領域 $y<ax^2$ 内の点 P から引いた 2 本の接線の交角が θ を保って P が移動するとき，P の軌跡の方程式を求め，$\theta\to\pi/2$ としたときの軌跡の極限の図形を調べよ．ここで，$0<\theta<\pi/2$ とする．

【解答】

放物線上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\,a\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\,a\beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ における接線の交点 P の座標は,

$$\mathrm{P}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\,a\alpha\beta\right)\overset{\text{put}}{=}\mathrm{P}(x_0,y_0) \qquad \cdots\cdots(5.2.1)$$

と書けるので，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ をそれぞれ複素数 z_1, z_2 と同一視して,

$$z_1=\frac{\alpha-\beta}{2}+a\alpha(\alpha-\beta)\mathbf{i},\quad z_2=-\frac{\alpha-\beta}{2}-a\beta(\alpha-\beta)\mathbf{i} \qquad \cdots\cdots(5.2.2)$$

と表せば,

$$\arg.\frac{z_1}{z_2}\equiv\theta \pmod{2\pi} \qquad \cdots\cdots(5.2.3)$$

が変数 α, β の拘束条件である.

ここで,

$$\frac{z_1}{z_2}=-\frac{1+2a\alpha\mathbf{i}}{1+2a\beta\mathbf{i}}=\frac{-1}{1+4a\alpha^2\beta^2}\{1+4a^2\alpha\beta+2a(\alpha-\beta)\mathbf{i}\} \qquad \cdots\cdots(5.2.4)$$

であるから,

(5.2.4) を極形式 $r(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)$ と対応させて考えれば,

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{2a(\alpha-\beta)}{1+4a^2\alpha\beta}=\frac{-2a\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}{1+4a^2\alpha\beta}\quad(\because\ \alpha<\beta)\\&=\frac{-2a\sqrt{4x_0{}^2-4y_0/a}}{1+4a^2\cdot y_0/a}=\frac{-4\sqrt{a^2x_0{}^2-ay_0}}{1+4ay_0}\quad(\because\ (5.2.1))\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(5.2.5)$$

ここで，$0<\theta<\pi/2$ より，$\tan\theta>0$ であるから,

$$1+4ay_0<0\iff y_0<-\frac{1}{4a} \qquad \cdots\cdots(5.2.6)$$

このとき，(5.2.5) より,

$$\begin{aligned}&(1+4ay_0)^2\tan^2\theta=16\{a^2x_0{}^2-ay_0\}\\&\iff 16a^2\tan^2\theta\cdot y_0{}^2+16ay_0+8a\tan^2\theta\cdot y_0-16a^2x_0{}^2+\tan^2\theta=0\\&\iff \frac{\left(y_0+\dfrac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta}\right)^2}{\dfrac{1+\tan^2\theta}{4a^2\tan^4\theta}}-\frac{x_0{}^2}{\dfrac{1+\tan^2\theta}{4a^2\tan^2\theta}}=1\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(5.2.7)$$

従って，点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ は双曲線

$$\frac{\left(y+\dfrac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta}\right)^2}{\dfrac{1+\tan^2\theta}{4a^2\tan^4\theta}}-\frac{x^2}{\dfrac{1+\tan^2\theta}{4a^2\tan^2\theta}}=1\quad\left(y<-\frac{1}{4a}\right) \qquad \cdots\cdots(5.2.8)$$

上に存在し，(**必要条件**)

逆に，双曲線 (5.2.8) は放物線 $y=ax^2$ の準線 $y=-\dfrac{1}{4a}$ の下側の領域に存在するので，
双曲線 (5.2.8) 上のあらゆる点から放物線 $y=ax^2$ に対して交角 θ の 2 接線が引ける．
即ち，点 P は双曲線 (5.2.8) 上をくまなく動く．(**十分性**)
以上より，求める点 P の軌跡は，

$$\frac{\left(y+\dfrac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta}\right)^2}{\dfrac{1+\tan^2\theta}{4a^2\tan^4\theta}}-\frac{x^2}{\dfrac{1+\tan^2\theta}{4a^2\tan^2\theta}}=1 \quad \left(y<-\frac{1}{4a}\right) \qquad \cdots\cdots(5.2.8)$$

また，双曲線 (5.2.8) の漸近線の方程式は，

$$y=\pm\frac{x}{\tan\theta}-\frac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta} \qquad \cdots\cdots(5.2.9)$$

で与えられ，

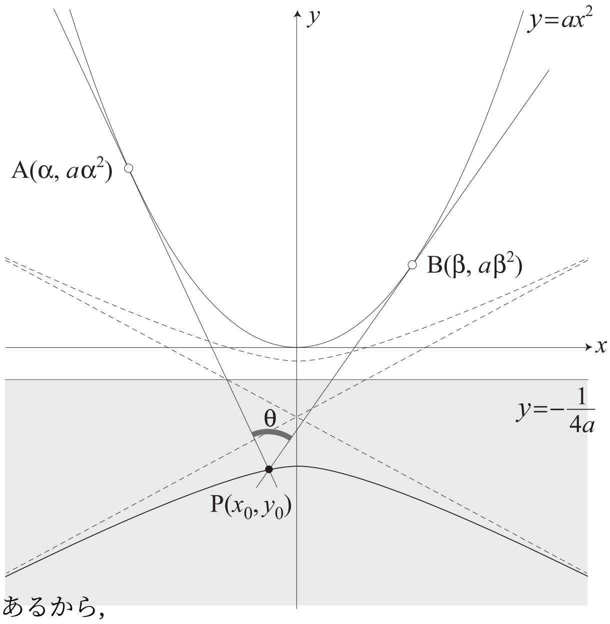
$$\pm\frac{x}{\tan\theta}-\frac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta} \xrightarrow{\theta\to\pi/2} \pm0\cdot x-\frac{1+0}{4a}=-\frac{1}{4a}$$

であるから，
双曲線 (5.2.8) の極限図形は，

$$放物線\ y=ax^2 の準線 : y=-\frac{1}{4a}$$

[Note]

右図は，$a=1$，$\theta=60^\circ$，$\tan\theta=\sqrt{3}$ の場合の図である．一般に，



$$\begin{cases} 漸近線の交点 : & -\dfrac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta} \\ 準線 : & -\dfrac{1}{4a} \\ 双曲線の頂点 : & -\dfrac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta}\pm\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{2a\tan^2\theta} \end{cases}$$

であるから，

$$-\frac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta}-\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{2a\tan^2\theta}<-\frac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta}$$
$$<-\frac{1}{4a}<-\frac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta}+\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{2a\tan^2\theta}$$

が成り立つ．
更に，$\pi/2<\theta<\pi$ の場合，(5.2.5) において $\tan\theta<0$ であるから，
点 P の y 座標 y_0 に対して，$y_0>-\dfrac{1}{4a}$ が成り立ち，P の軌跡は放物線の準線の上側の部分の双曲線

$$\frac{\left(y+\dfrac{2+\tan^2\theta}{4a\tan^2\theta}\right)^2}{\dfrac{1+\tan^2\theta}{4a^2\tan^4\theta}}-\frac{x^2}{\dfrac{1+\tan^2\theta}{4a^2\tan^2\theta}}=1 \quad \left(y>-\frac{1}{4a}\right) \qquad \cdots\cdots(5.2.10)$$

となる事に注意されたい．

【5.3】

放物線 $y = ax^2\,(a > 0)$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha, a\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta, a\beta^2)$ における 2 本の接線の交点を P とする．放物線と 2 本の接線が囲む領域の面積が一定値 C を満たして P が動くとき，その軌跡の方程式を求めよ．

【解答】

放物線上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha, a\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta, a\beta^2)$ $(\alpha < \beta)$ における接線の交点 P の座標は,

$$\mathrm{P}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ a\alpha\beta\right) \overset{\text{put}}{=} \mathrm{P}(x_0, y_0) \qquad \cdots\cdots(5.3.1)$$

と書ける．

このとき，放物線と直線 AB の囲む領域の面積を S_{up},

放物線と 2 本の接線の囲む (題意の) 領域の面積を S_{low} と表せば,

$$S_{up} : S_{low} = 2 : 1 \ \wedge\ S_{up} = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \iff S_{low} = \frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3 \qquad \cdots\cdots(5.3.2)$$

であるから，(5.3.1), (5.3.2) により,

$$\begin{aligned} C = \frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3 &= \frac{a}{12}\left\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{a}{12}\left\{(2x_0)^2 - 4\cdot\frac{y_0}{a}\right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{2a}{3}\left\{{x_0}^2 - \frac{y_0}{a}\right\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(5.3.3)$$

ここで，(5.3.3) 右辺の根号内の符号に注意して両辺を 2/3 乗すると,

$$\begin{cases} y_0 = a{x_0}^2 - \sqrt[3]{\dfrac{9aC^2}{4}} & \cdots\cdots(5.3.4) \\ y_0 < a{x_0}^2 & \cdots\cdots(5.3.5) \end{cases}$$

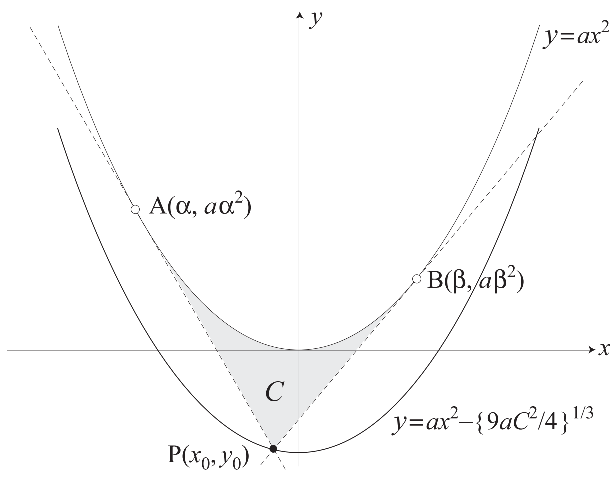
従って，点 P は方程式 (5.3.4) で表される放物線上に存在し，(**必要条件**)

この放物線の全体は (5.3.5) で表される領域の内部に存在するので,

点 P は放物線

$$y = ax^2 - \sqrt[3]{\frac{9aC^2}{4}} \quad (-\infty < x < \infty) \qquad \cdots\cdots(5.3.6)$$

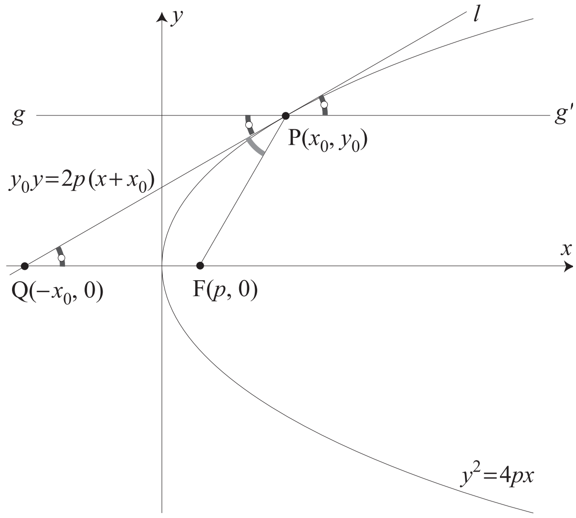
全体をくまなく動くと考えてよい．(**十分性**)



【6.1】

放物線 $\mathfrak{P}: y^2 = 4px\ (p \neq 0)$ の焦点を F で表し，放物線 $\mathfrak{P}$ 上の任意の点を $\mathrm{P}\,(\neq \mathrm{O})$ とする．
P における $\mathfrak{P}$ の接線は，直線 PF と P を通り放物線の対称軸に平行な直線との交角を 2 等分することを示せ．

【解答】



右図により，題意の成立を示すためには，

$$\begin{aligned} &\angle \mathrm{FPQ} = \angle \mathfrak{g}\mathrm{PQ} \\ &\qquad \iff \angle \mathrm{FPQ} = \angle \mathrm{FQP} \\ &\qquad\qquad \iff \mathrm{FP} = \mathrm{FQ} \qquad \cdots\cdots(6.1.1) \end{aligned}$$

の成立を示せばよい．
放物線 $\mathfrak{P}$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0) \neq \mathrm{O}$ における接線 $\mathfrak{l}$ は，

$$y_0 y = 2p(x + x_0) \qquad \cdots\cdots(6.1.2)$$

で与えられるので，接線 $\mathfrak{l}$ と x 軸との交点 Q は，

$$\mathrm{Q}(-x_0, 0) \qquad \cdots\cdots(6.1.3)$$

このとき，

$$\mathrm{FP} = \sqrt{(x_0 - p)^2 + {y_0}^2} = \sqrt{(x_0 - p)^2 + 4px_0} = |x_0 + p| = |p - (-x_0)| = \mathrm{FQ} \qquad \cdots\cdots(6.1.4)$$

が成り立つので，

$$\mathrm{FP} = \mathrm{FQ} \qquad \cdots\cdots(6.1.1)$$

以上により，題意は示された．

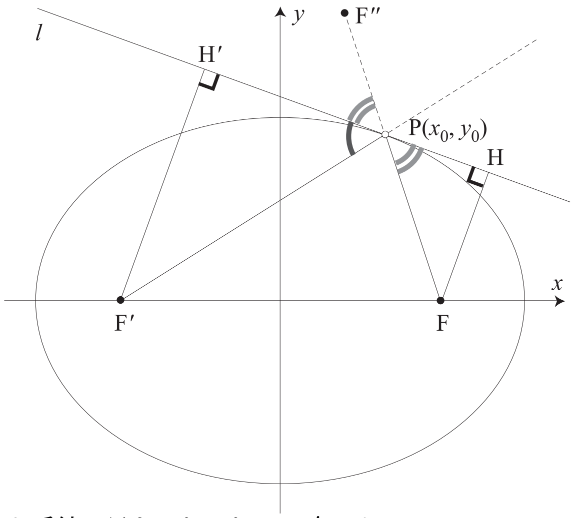
【6.2】

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0) \qquad \cdots\cdots(6.2.1)$$

の 2 焦点を F, F′ とする．$\mathfrak{E}$ 上の任意の点 P における接線は ∠FPF′ の外角を 2 等分することを示せ.

【解答】



右図により，題意の成立を示すためには,

$$
\begin{aligned}
&\angle \mathrm{F'PH'} = \angle \mathrm{F''PH'} \\
\iff\ &\angle \mathrm{F'PH'} = \angle \mathrm{FPH} \\
\iff\ &\mathrm{FP} : \mathrm{F'P} = \mathrm{FH} : \mathrm{F'H'} \qquad \cdots\cdots(6.2.2)
\end{aligned}
$$

の成立を示せばよい.

楕円 $\mathfrak{E}$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線 $\mathfrak{l}$ は,

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \iff b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2 \qquad \cdots\cdots(6.2.3)$$

で与えられるので,

2 焦点 $\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ から接線 $\mathfrak{l}$ に下ろした垂線の足をそれぞれ H, H′ とすると,

$$\mathrm{FH} = \frac{|b^2 x_0 \sqrt{a^2-b^2} - a^2 b^2|}{\sqrt{b^4 {x_0}^2 + a^4 {y_0}^2}}, \quad \mathrm{F'H'} = \frac{|-b^2 x_0 \sqrt{a^2-b^2} - a^2 b^2|}{\sqrt{b^4 {x_0}^2 + a^4 {y_0}^2}} \qquad \cdots\cdots(6.2.4)$$

$$\therefore \quad \mathrm{FH} : \mathrm{F'H'} = |\sqrt{a^2-b^2}x_0 - a^2| : |\sqrt{a^2-b^2}x_0 + a^2| \qquad \cdots\cdots(6.2.5)$$

一方,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FP} &= \sqrt{\left(x_0 - \sqrt{a^2-b^2}\right)^2 + {y_0}^2} \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{a^2({x_0}^2 - 2\sqrt{a^2-b^2}x_0 + a^2 - b^2) + b^2(a^2 - {x_0}^2)} \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{(a^2-b^2){x_0}^2 - 2a^2\sqrt{a^2-b^2}x_0 + a^4} \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{\left(\sqrt{a^2-b^2}x_0 - a^2\right)^2} = \frac{1}{a}|\sqrt{a^2-b^2}x_0 - a^2| \qquad \cdots\cdots(6.2.6)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \mathrm{FP} : \mathrm{F'P} = |\sqrt{a^2-b^2}x_0 - a^2| : |\sqrt{a^2-b^2}x_0 + a^2| \qquad \cdots\cdots(6.2.7)$$

従って，(6.2.5), (6.2.7) により (6.2.2) は導かれた.

[(三角不等式による) 別証]

Fig.1 において，点 P における接線 l 上の動点 Q に対して，

$$\mathrm{F'Q} + \mathrm{FQ} = \mathrm{F'Q} + \mathrm{QQ'} + \mathrm{FQ'} \geq \mathrm{F'Q'} + \mathrm{FQ'} = \mathrm{F'P} + \mathrm{FP} = 2a \qquad \cdots\cdots(6.2.8)$$

ここで，三角形 $\mathrm{F'QQ'}$ に三角不等式を適用し，更に，楕円の性質 $\mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = 2a$ を用いた．
また，(三角) 不等式の等号成立条件は，$\mathrm{Q} = \mathrm{Q'} = \mathrm{P}$ である．

Fig.2 において，F の l に関する対称点を $\mathrm{F''}$ で表せば，l 上の動点 Q に対して，

$$\mathrm{F'Q} + \mathrm{FQ} = \mathrm{F'Q} + \mathrm{F''Q} \geq \mathrm{F'F''} \qquad \cdots\cdots(6.2.9)$$

ここで，三角形 $\mathrm{F'QF''}$ に対して三角不等式を用いた．
また，(三角) 不等式の等号成立条件は，Q が l と直線 $\mathrm{F'F''}$ との交点に一致したときに限る．

不等式 (6.2.8), (6.2.9) の等号成立条件は一致するはずであるから，
l 上の接点 P は，l と $\mathrm{F'F''}$ との交点に一致し，

$$\angle \mathrm{FPH} = \angle \mathrm{F''PH} = \angle \mathrm{F'P}l \qquad \cdots\cdots(6.2.10)$$

が成り立つことで題意が示される．

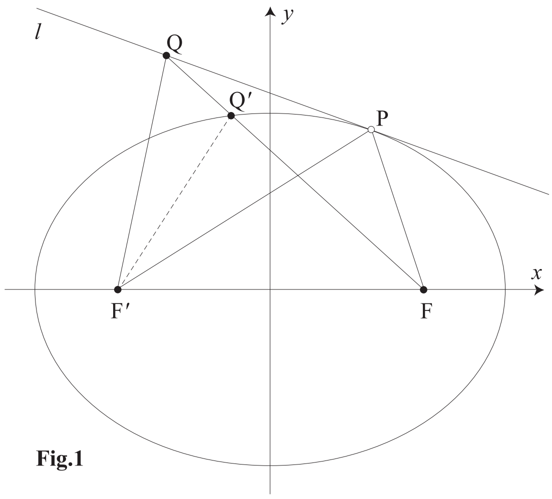


Fig.1

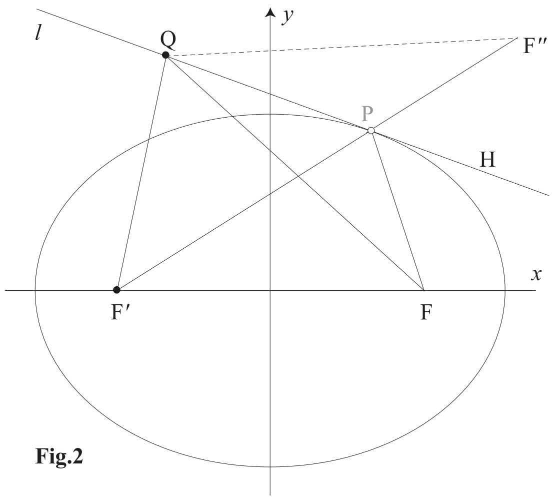


Fig.2

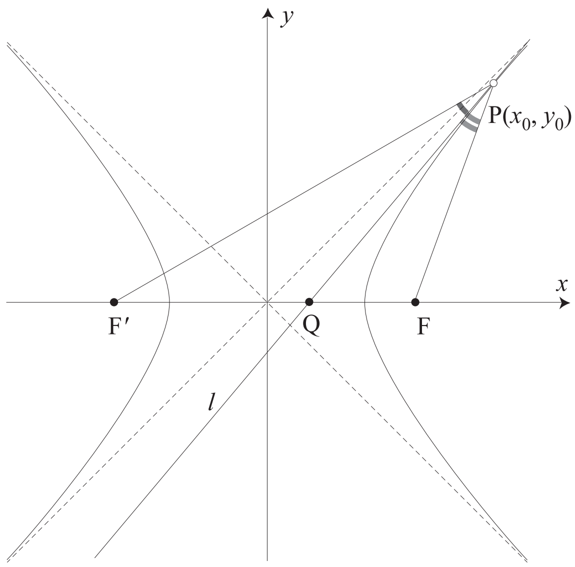
【6.3】

双曲線

$$\mathfrak{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0) \qquad \cdots\cdots(6.3.1)$$

の 2 焦点を F, F′ とする．$\mathfrak{H}$ 上の任意の点 P における接線は ∠FPF′ を 2 等分することを示せ．

【解答】



題意の成立を示すためには，

$$\angle \mathrm{FPQ} = \angle \mathrm{F'PQ} \iff \mathrm{FP} : \mathrm{F'P} = \mathrm{FQ} : \mathrm{F'Q} \qquad \cdots\cdots(6.3.2)$$

の成立を示せばよい．

双曲線 $\mathfrak{H}$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線 $\mathfrak{l}$ は，

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \iff b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2 \qquad \cdots\cdots(6.3.3)$$

で与えられるので，$\mathfrak{l}$ と x 軸との交点 Q は，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{a^2}{x_0},\ 0\right) \qquad \cdots\cdots(6.3.4)$$

このとき，

$$\mathrm{FQ} : \mathrm{F'Q} = \left|\sqrt{a^2+b^2} - \frac{a^2}{x_0}\right| : \left|\sqrt{a^2+b^2} + \frac{a^2}{x_0}\right| = \left|\sqrt{a^2+b^2}\,x_0 - a^2\right| : \left|\sqrt{a^2+b^2}\,x_0 + a^2\right| \qquad \cdots\cdots(6.3.5)$$

一方，

$$\begin{aligned}
\mathrm{FP} &= \sqrt{\left(x_0 - \sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + {y_0}^2} \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{a^2({x_0}^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\,x_0 + a^2 + b^2) + b^2({x_0}^2 - a^2)} \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{(a^2+b^2){x_0}^2 - 2a^2\sqrt{a^2+b^2}\,x_0 + a^4} \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\,x_0 - a^2\right)^2} = \frac{1}{a}\left|\sqrt{a^2+b^2}\,x_0 - a^2\right| \qquad \cdots\cdots(6.3.6)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{FP} : \mathrm{F'P} = \left|\sqrt{a^2+b^2}\,x_0 - a^2\right| : \left|\sqrt{a^2+b^2}\,x_0 + a^2\right| \qquad \cdots\cdots(6.3.7)$$

従って，(6.3.4), (6.3.6) により (6.3.2) は導かれた．

[(三角不等式を用いた) 別証]

Fig.1 において，点 P における接線 l 上の動点 Q に対して，

$$|\mathrm{F'Q}-\mathrm{FQ}| = |\mathrm{F'Q}-\mathrm{QQ'}-\mathrm{FQ'}| \leq |\mathrm{F'Q'}-\mathrm{FQ'}| = |\mathrm{F'P}-\mathrm{FP}| = 2a \qquad \cdots\cdots(6.3.8)$$

ここで，三角形 F′QQ′ に三角不等式を適用し，更に，双曲線の性質 $|\mathrm{FP}-\mathrm{F'P}| = 2a$ を用いた．
また，(三角) 不等式の等号成立条件は，$\mathrm{Q} = \mathrm{Q'} = \mathrm{P}$ である．

Fig.2 において，F の l に関する対称点を F″ で表せば，l 上の動点 Q に対して，

$$|\mathrm{F'Q}-\mathrm{FQ}| = |\mathrm{F'Q}-\mathrm{F''Q}| \leq \mathrm{F'F''} \qquad \cdots\cdots(6.3.9)$$

ここで，三角形 F′QF″ に対して三角不等式を用いた．
また，(三角) 不等式の等号成立条件は，Q が l と直線 F′F″ との交点に一致したときに限る．

不等式 (6.3.8), (6.3.9) の等号成立条件は一致するはずであるから，
l 上の接点 P は，l と F′F″ との交点に一致し，

$$\angle\mathrm{FPH} = \angle\mathrm{F''PH} = \angle\mathrm{F'PH} \qquad \cdots\cdots(6.3.10)$$

が成り立つことで題意が示される．

Fig.1

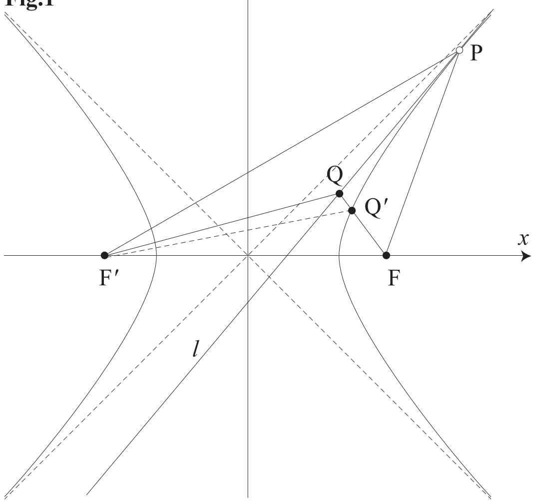
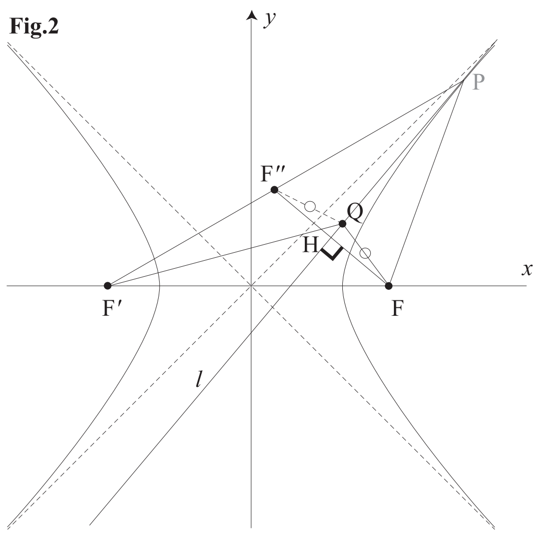


Fig.2



【7.1】　放物線の方程式

F$(a,0)$ を焦点，$d: x=-a$ を準線とする．
定義 (7.1) に基づいて放物線の方程式を a, x, y の関係式の形で求めよ．
更に，放物線の極方程式を (7.3) の形で導き，(7.3) の c を a の式で表せ．

【解答】

$a>0 \wedge e=1$ としてよい．
定義 (7.1) に基づき，放物線上の点 P(x,y) は次の等式を満たす．

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=|x-(-a)| \iff (x-a)^2+y^2=(x+a)^2 \iff y^2=4ax \qquad \cdots\cdots(7.1.1)$$

ここで，(7.1.1) に変換

$$x=a+r\cos\theta \ \wedge\ y=r\sin\theta \ \ (r>0) \qquad \cdots\cdots(7.1.2)$$

を与えて，

$$\begin{aligned} r^2\sin^2\theta=4a(a+r\cos\theta) &\iff (1-\cos^2\theta)r^2-4a\cos\theta\cdot r-4a^2=0 \\ &\iff \{(1-\cos\theta)r-2a\}\{(1+\cos\theta)r+2a\}=0 \\ &\iff r=\frac{2a}{1-\cos\theta} \quad (\because\ (1+\cos\theta)r+2a>0) \qquad \cdots\cdots(7.1.3) \end{aligned}$$

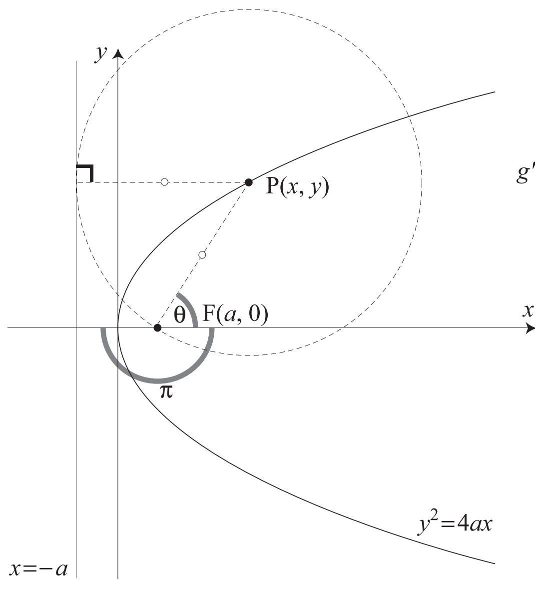
ここで，

$$c=e\cdot\mathrm{dist}(\mathrm{F},d)=1\cdot\mathrm{dist}((a,0),\,x=-a)=2a \qquad \cdots\cdots(7.1.4)$$

[Note]

極方程式 (7.1.3) は準線 $d: x=-a$ から焦点 F$(a,0)$ に向う方向を**正方向**とした場合の表示である．逆に，焦点から準線に向う方向を正とした場合は，θ を $\pi+\theta$ に書き換えればよい．即ち，

$$r=\frac{2a}{1-\cos(\pi+\theta)}=\frac{2a}{1+\cos\theta} \qquad \cdots\cdots(7.1.5)$$



【7.2】 楕円の方程式

F$(\pm ae, 0)$ を焦点，$d : x = \pm a/e$ を準線とする．
定義 (7.1) に基づいて楕円の方程式を a, e, x, y の関係式の形で求めよ．
更に，楕円の極方程式を (7.3) の形で導き，(7.3) の c を a, e の式で表せ．

【解答】

$a > 0 \wedge 0 < e < 1$ としてよい．
更に，F$(ae, 0)$, $d : x = a/e$ として考察する．
定義 (7.1) に基づき，楕円上の点 P(x, y) は次の等式を満たす．

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-ae)^2+y^2} = e\left|\frac{a}{e}-x\right| &\iff (x-ae)^2+y^2 = e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2 \\ &\iff (1-e^2)x^2+y^2 = a^2(1-e^2) \\ &\iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \qquad \cdots\cdots(7.2.1)\end{aligned}$$

ここで，(7.2.1) に変換

$$x = ae + r\cos\theta \ \wedge \ y = r\sin\theta \ \ (r > 0) \qquad \cdots\cdots(7.2.2)$$

を与えて，

$$\begin{aligned}&(1-e^2)(ae+r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta = a^2(1-e^2) \\ \iff &(1-e^2\cos^2\theta)r^2 + 2ae(1-e^2)\cos\theta\cdot r - a^2(1-e^2)^2 = 0 \\ \iff &\{(1-e\cos\theta)r + a(1-e^2)\}\{(1+e\cos\theta)r - a(1-e^2)\} = 0 \\ \iff &r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad (\because\ (1-e\cos\theta)r + a(1-e^2) > 0) \qquad \cdots\cdots(7.2.3)\end{aligned}$$

ここで，

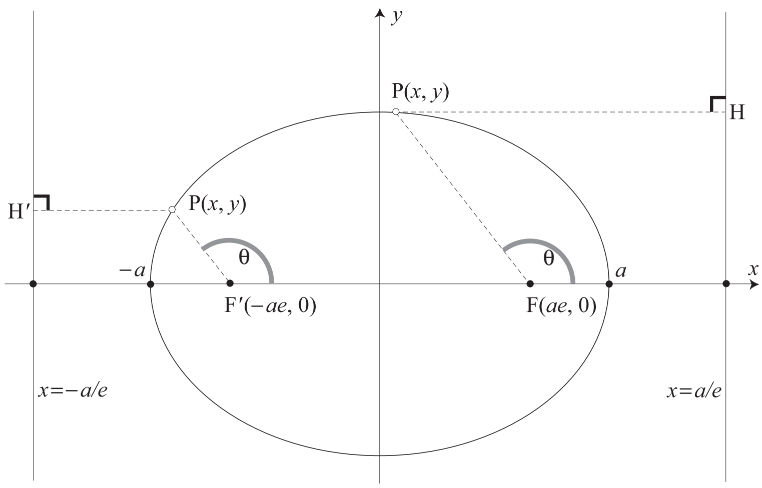
$$\begin{aligned}c =& e\cdot\mathrm{dist}(\mathrm{F}, d) \\ =& e\cdot\mathrm{dist}((ae, 0),\ x = a/e) \\ =& e\,(a/e - ae) = a(1-e^2) \qquad \cdots\cdots(7.2.4)\end{aligned}$$

[Note]

楕円の焦点を F$'(-ae, 0)$,
準線を $d' : x = -a/e$ にとった場合，
楕円の極方程式は，

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta} \qquad \cdots\cdots(7.2.5)$$

で与えられる．これを確認せよ．



【7.3】 双曲線の方程式

$\mathrm{F}(\pm ae, 0)$ を焦点，$d: x = \pm a/e$ を準線とする．
定義 (7.1) に基づいて双曲線の方程式を a, e, x, y の関係式の形で求めよ．
更に，双曲線の極方程式を (7.3) の形で導き，(7.3) の c を a, e の式で表せ．

【解答】

$a > 0 \wedge e > 1$ としてよい．
更に，$\mathrm{F}(ae, 0)$, $d: x = a/e$ として考察する．
定義 (7.1) に基づき，双曲線上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は次の等式を満たす．

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-ae)^2+y^2} = e\left|x-\frac{a}{e}\right| &\iff (x-ae)^2+y^2 = e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2 \\ &\iff (e^2-1)x^2-y^2 = a^2(e^2-1) \\ &\iff \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1 \qquad \cdots\cdots(7.3.1)\end{aligned}$$

ここで，(7.3.1) に変換

$$x = ae + r\cos\theta \ \wedge \ y = r\sin\theta \ \ (r > 0) \qquad \cdots\cdots(7.3.2)$$

を与えて，

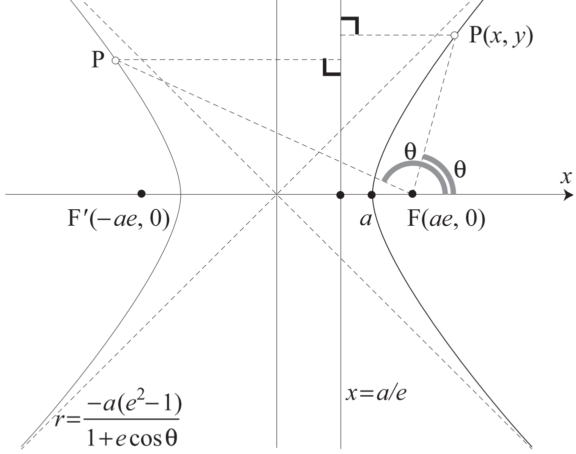
$$\begin{aligned}&(e^2-1)(ae+r\cos\theta)^2 - r^2\sin^2\theta = a^2(e^2-1) \\ &\iff (1-e^2\cos^2\theta)r^2 - 2ae(e^2-1)\cos\theta\cdot r - a^2(e^2-1)^2 = 0 \\ &\iff \{(1-e\cos\theta)r - a(e^2-1)\}\{(1+e\cos\theta)r + a(e^2-1)\} = 0 \\ &\iff \begin{cases} r = \dfrac{a(e^2-1)}{1-e\cos\theta} & \cdots\cdots(7.3.3) \\[2ex] r = -\dfrac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta} & \cdots\cdots(7.3.4) \end{cases}\end{aligned}$$

ここで，

$$c = e\cdot\mathrm{dist}(\mathrm{F}, d) = e\cdot\mathrm{dist}((ae, 0), x = a/e) = e\,(ae - a/e) = a(e^2-1) \qquad \cdots\cdots(7.3.5)$$

[Note]

極方程式 (7.3.3) は右側の双曲線を表し，(7.3.4) は左側を表す．何れも右辺が正となる θ の範囲で定義される．例えば，$e = \sqrt{2}$ の場合，漸近線の方程式は $y = \pm x$ であり，右側を定義する θ の範囲は，$\pi/4 < \theta < 7\pi/4$．左側は，$3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$ である．
(確認せよ!!)



【7.5】

楕円

$$\mathfrak{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0) \qquad \cdots\cdots(7.5.1)$$

の焦点の 1 つを $\mathrm{F}(c, 0)$ $(c>0)$ とする.

F を通る楕円 $\mathfrak{E}$ の 2 つの弦 PQ, RS が直交するとき,

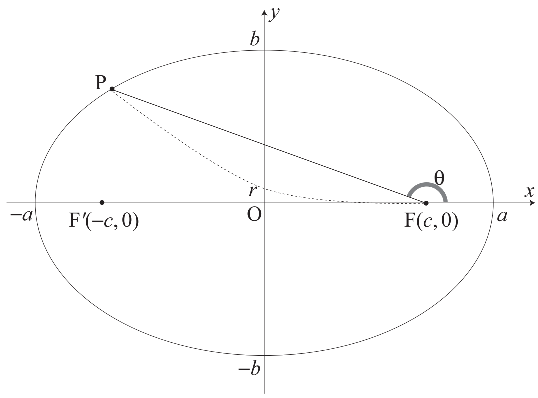
$$\frac{1}{\mathrm{PF}\times\mathrm{QF}}+\frac{1}{\mathrm{RF}\times\mathrm{SF}} \qquad \cdots\cdots(7.5.2)$$

の値が一定であることを示せ.

【解答】

一般に, 点 $(c, 0)$ を極として楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \land \ c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad \cdots\cdots(7.5.3)$$



上の点 P を極表示すると (**右上図**),

$$b^2(c+r\cos\theta)^2+a^2r^2\sin^2\theta-a^2b^2=0 \ \land \ c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$\iff (b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)r^2+2b^2\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\, r-b^4=0$$

$$\iff \Big((a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta)r+b^2\Big)\Big((a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta)r-b^2\Big)=0$$

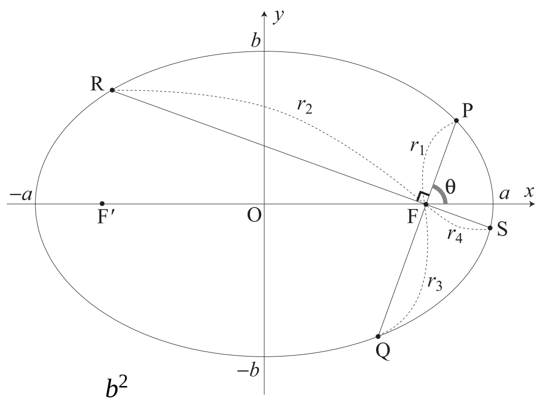
$$\iff \Big(a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\Big)r-b^2=0$$

$$\iff r=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta} \qquad \cdots\cdots(7.5.4)$$

ここで,

$$\Big(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\Big)r+b^2>0 \qquad \cdots\cdots(7.5.5)$$

$$(\because) \quad a>\sqrt{a^2-b^2}\geq\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta \ \land \ r>0$$



であるから, 題意の 4 点 P, Q, R, S に対して, (7.5.4) より,

$$\mathrm{PF}=r_1=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}, \qquad \mathrm{RF}=r_2=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos(\theta+\pi/2)}$$

$$\mathrm{QF}=r_3=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos(\theta+\pi)}, \qquad \mathrm{SF}=r_4=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos(\theta-\pi/2)}$$

と表せる (**下図**).

このとき,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r_1r_3}=\dfrac{1}{b^4}\Big(a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\Big)\Big(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\Big)=\dfrac{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta}{b^4} \\ \dfrac{1}{r_2r_4}=\dfrac{1}{b^4}\Big(a-\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta\Big)\Big(a+\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta\Big)=\dfrac{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}{b^4} \end{cases}$$

であるから,

$$\frac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{QF}}+\frac{1}{\mathrm{RF}\cdot\mathrm{SF}}=\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{r_2r_4}=\frac{a^2+b^2}{b^4} \ (Const.)$$

【7.6】

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \qquad \cdots\cdots(7.6.1)$$

の焦点の 1 つを F$(c, 0)$ $(c > 0)$ とし，F を極とする $\mathfrak{E}$ の極線を $\mathfrak{g}$ で表す．
また，F を通る任意の直線と $\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{g}$ との交点を左から順に A, B, P とし，

$$\mathrm{AP} = r_1, \quad \mathrm{BP} = r_2, \quad \mathrm{FP} = r_3 \qquad \cdots\cdots(7.6.2)$$

で表すとき，

$$r_3 = \frac{2}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}} \ (\textbf{調和平均}) \quad (\Longleftrightarrow \ \mathrm{PA} : \mathrm{PB} = \mathrm{FA} : \mathrm{FB}) \qquad \cdots\cdots(7.6.3)$$

が成り立つことを示せ．

【解答】

楕円 $\mathfrak{E}$ 上の 2 点 A, B を焦点 F を極とする極形式で表示すると，

$$\begin{aligned} \mathrm{FB} : \mathrm{FA} &= \frac{c}{1 + e\cos\theta} : \frac{c}{1 + e\cos(\theta + \pi)} \\ &= 1 - e\cos\theta : 1 + e\cos\theta \quad (c = e\,\mathrm{dist}(\mathrm{F}, g)) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(7.6.4)$$

ここで，$\angle \mathrm{PF}x = \theta$ であり，e は離心率を表す．
一方，

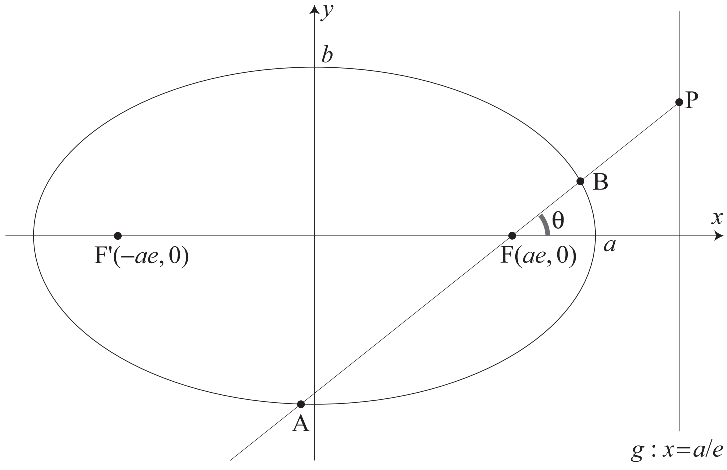
$$\mathrm{PA} = \mathrm{PF} + \mathrm{FA} = \frac{\mathrm{dist}(\mathrm{F}, g)}{\cos\theta} + \frac{c}{1 - e\cos\theta} = \frac{c}{e\cos\theta} + \frac{c}{1 - e\cos\theta} \qquad \cdots\cdots(7.6.5)$$

$$\mathrm{PB} = \mathrm{PF} - \mathrm{FB} = \frac{\mathrm{dist}(\mathrm{F}, g)}{\cos\theta} - \frac{c}{1 + e\cos\theta} = \frac{c}{e\cos\theta} - \frac{c}{1 + e\cos\theta} \qquad \cdots\cdots(7.6.6)$$

(7.6.5), (7.6.6) により，

$$\begin{aligned} \mathrm{PA} : \mathrm{PB} &= \frac{1}{e\cos\theta(1 - e\cos\theta)} : \frac{1}{e\cos\theta(1 + e\cos\theta)} \\ &= 1 + e\cos\theta : 1 - e\cos\theta \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(7.6.7)$$

従って，(7.6.4), (7.6.7) より (7.6.3) を得る．



【8.2】 標準化

次の 2 次曲線を標準化せよ.

(1) $7x^2+48xy-7y^2+20x-110y-50=0$

(2) $11x^2+4xy+14y^2-4x-28y-16=0$

(3) $x^2-4xy+4y^2-6x-8y+5=0$

【解答】

与えられた 2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ を

$$ {}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X}+{}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\mathbf{X}+r=0 \qquad \cdots\cdots(8.2.1)$$

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ \mathbf{N}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.2.2)$$

と表したときの 2 次行列 $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}$ を対角化する $\underline{\det=1}$ なる直交行列 $\mathbf{P}$ $({}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1})$,
および変換 $\mathbf{X}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$ により標準化された 2 次曲線 $f(x',y')=0$ を以下に記す.

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}$	$\det.\mathbf{M}<0$ (**双曲線**)	$\mathbf{P}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$(y'+2)^2-(x'-1)^2=1$
$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$	$\det.\mathbf{M}>0$ (**楕円**)	$\mathbf{P}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\dfrac{1}{3}\left(x'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(y'-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=1$
$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\det.\mathbf{M}=0$ (**放物線**)	$\mathbf{P}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\left(y'-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\left(x'-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

何れの場合も行列 $\mathbf{P}$ は回転行列

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (\det.\mathbf{P}=1 \wedge {}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}) \qquad \cdots\cdots(8.2.3)$$

の形式である.

即ち, 角 θ の回転変換

$$\mathbf{X}=\mathbf{P}\mathbf{X}' \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.2.4)$$

により, 点 (x',y') が点 (x,y) に移っている.

このことは, 2 次曲線

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+p'x'+q'y'+r'=0 \qquad \cdots\cdots(8.2.5)$$

を角 θ 回転したものが

$$ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0 \qquad \cdots\cdots(8.2.6)$$

の実体であることを意味している.

【8.3】 94 工学院大

曲線

$$(10+3\sqrt{3})x^2+6xy+(10-3\sqrt{3})y^2=16 \qquad \cdots\cdots(8.3.1)$$

は楕円を表すことを示せ．また，その焦点の座標を求めよ．

【解答】

曲線 (8.3.1) の表現行列 $\mathbf{M}$ は，

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}10+3\sqrt{3} & 3\\ 3 & 10-3\sqrt{3}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.3.2)$$

であり，$\mathrm{trc}.\mathbf{M}=20$, $\det.\mathbf{M}=64$ であるから，
$\mathbf{M}$ の固有方程式と固有値は，

$$\lambda^2-20\lambda+64=0 \iff \lambda_1=16,\ \lambda_2=4 \qquad \cdots\cdots(8.3.3)$$

λ_1, λ_2 に対応する固有 vector は，

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}1\\ 2-\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}-(2-\sqrt{3})\\ 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.3.4)$$

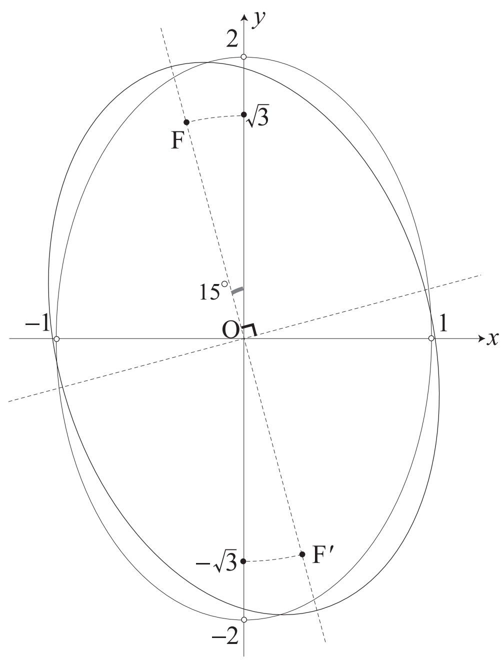
$\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ により，正規直交行列 $\mathbf{P}$ を

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}\begin{pmatrix}1 & -(2-\sqrt{3})\\ 2-\sqrt{3} & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.3.5)$$

と定める．

このとき，曲線 (8.3.1) は ${}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=(x\ \ y)$ を用いて，

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X}=16 &\iff {}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}'(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P})\mathbf{X}'=16 \ \wedge\ \mathbf{X}=\mathbf{P}\mathbf{X}'\\ &\iff (x'\ \ y')\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=16\\ &\iff (x')^2+\frac{(y')^2}{4}=1 \qquad \cdots\cdots(8.3.6)\end{aligned}$$



と楕円に標準化される．
従って，(回転) 変換前の曲線 (8.3.1) も楕円であり，
その焦点の座標は $\mathbf{P}$ により，

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}\begin{pmatrix}1 & -(2-\sqrt{3})\\ 2-\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}\\ &\qquad=\frac{\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}\begin{pmatrix}-(2-\sqrt{3})\\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \pm\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) \qquad \cdots\cdots(8.3.7)$$

【8.4】 92 九州芸工大

xy 平面上の 2 次曲線

$$x^2+2axy+y^2+2x-8y+b=0 \qquad \cdots\cdots(8.4.1)$$

を平行移動し，更に，原点中心に角 θ $(0\leq\theta\leq\pi/2)$ 回転して得られる曲線が

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1 \qquad \cdots\cdots(8.4.2)$$

であるとき，a, b, θ の値を求めよ．

【解答】

表現行列

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{N}=\begin{pmatrix}2\\ -8\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.4.3)$$

の 2 次曲線 (8.4.1) を標準化した曲線が

$$5x^2-3y^2-15=0 \qquad \cdots\cdots(8.4.2)'$$

であるから，$\mathbf{M}$ の固有値は

$$\lambda_1=5,\ \lambda_2=-3 \qquad \cdots\cdots(8.4.4)$$

と考えられ，

$$\begin{cases}\mathrm{trc}.\mathbf{M}=\lambda_1+\lambda_2=5+(-3)=2\\ \det.\mathbf{M}=\lambda_1\lambda_2=5\times(-3)=-15\,(=1-a^2)\end{cases}$$

より，

$$1-a^2=-15 \iff a=\pm4 \qquad \cdots\cdots(8.4.5)$$

(A) $a=4$ の場合;

λ_1, λ_2 に対応する固有 vector はそれぞれ

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

と表され，$\mathbf{M}$ を標準化する正規直交行列は，

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ\\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.4.6)$$

このとき，題意の回転角 θ は，

$$\theta=-\pi/4<0 \qquad \cdots\cdots(8.4.7)$$

(B) $a=-4$ の場合;

λ_1, λ_2 に対応する固有 vector はそれぞれ

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

と表され，$\mathbf{M}$ を標準化する正規直交行列は，

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ)\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.4.8)$$

このとき，題意の回転角 θ は，

$$0<\theta=\pi/4<\pi/2 \qquad \cdots\cdots(8.4.9)$$

(B) より，(8.4.1) を $\pi/4$ 回転し，平行移動したものが (8.4.2) となるから，$b=-14$.

$$\therefore\quad a=-4\ \wedge\ b=-14\ \wedge\ \theta=\pi/4 \qquad \cdots\cdots(8.4.10)$$

【8.5】　95 千葉大

座標平面上の 2 点 A$(-1,-1)$, B$(1,1)$ からの距離の和が 10 である点 P の軌跡を $\mathfrak{C}$ とする．

(1) $\mathfrak{C}$ の方程式は $ax^2+by^2+cxy=1$ の形となる．このとき，a, b, c の値を求めよ．

(2) $\mathfrak{C}$ を原点の周りに -45° 回転させた曲線を表す方程式を x, y の関係式の形で求めよ．

【解答】

(1) 題意より，点 P(x,y) に対して，

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=10$$

$$\iff \begin{cases} 5\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=x+y+25 \\ (x+1)^2+(y+1)^2\leq 100 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 24x^2-2xy+24y^2=575 & \cdots\cdots(8.5.1) \\ (x+1)^2+(y+1)^2\leq 100 & \cdots\cdots(8.5.2) \\ x+y+25\geq 0 & \cdots\cdots(8.5.3) \end{cases}$$

が成り立つので，

$$a=b=\frac{24}{575} \ \wedge \ c=-\frac{2}{575} \qquad \cdots\cdots(8.5.4)$$

(2) (8.5.1) を行列で表現して，

$$^{\mathrm{T}}\mathbf{XMX}=575 \ \wedge \ \mathbf{M}=\begin{pmatrix} 24 & -1 \\ -1 & 24 \end{pmatrix} \ \wedge \ \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.5.5)$$

ここで，

$$\mathbf{X}=\mathbf{PX}' \ \wedge \ \mathbf{P}=\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \ \wedge \ \mathbf{X}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.5.6)$$

を (8.5.5) に代入するが，

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 24 & -1 \\ -1 & 24 \end{pmatrix}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.5.7)$$

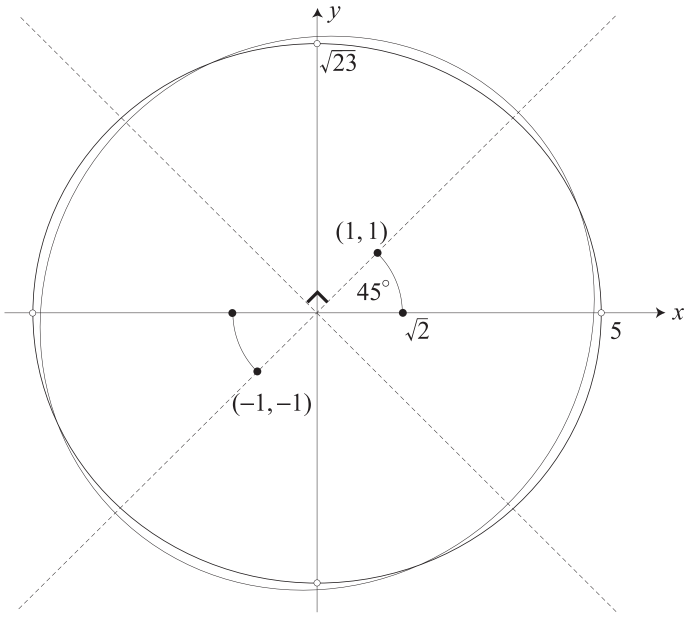
より，

$$^{\mathrm{T}}\mathbf{X}'(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP})\mathbf{X}'=575 \iff (x' \ y')\begin{pmatrix} 23 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=575$$

$$\iff \frac{(x')^2}{25}+\frac{(y')^2}{23}=1 \qquad \cdots\cdots(8.5.8)$$

従って，求める x, y の関係式は，

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{23}=1 \qquad \cdots\cdots(8.5.9)$$


y
$\sqrt{23}$
$(1, 1)$
45°
$\sqrt{2}$
5
x
$(-1, -1)$