調和共役点

2 点 A, B を通る直線上の 2 点で,

$$\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PA}}} = -\frac{\overline{\mathrm{QB}}}{\overline{\mathrm{QA}}} \quad \left(\overline{\mathrm{AB}}\text{は}\textbf{有向線分長}\text{を表す}\right)$$

を満たす P, Q を線分 AB に関して**互いに調和共役**という.

極と極線

定点 P を通る 2 次曲線 $\mathfrak{C}$ の割線 AB 上の点で, 線分 AB に関して P と互いに調和共役な点 Q の軌跡の直線を点 P を**極**とする 2 次曲線 $\mathfrak{C}$ の**極線**という.

【1.1】 極と極線

(1) 2 次曲線 $\mathfrak{C} : \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \ (\alpha\beta \neq 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$$\alpha x_0 x + \beta y_0 y = 1 \qquad \cdots\cdots(1.1.1)$$

で与えられることを示せ.

(2) 曲線 $\mathfrak{C}$ に対して点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ から 2 本の接線が引けるとき, その接点を Q, R とする.
このとき, 2 接点を結ぶ直線 QR の方程式は

$$\alpha x_0 x + \beta y_0 y = 1 \qquad \cdots\cdots(1.1.2)$$

で与えられることを示せ. (直線 QR を点 P を**極**とする $\mathfrak{C}$ の**極線**という)

【1.2】 放物線の極線

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ と放物線 $\mathfrak{P} : y^2 = 4px \ (p > 0)$ がある.

(1) ${y_0}^2 = 4px_0$ のとき, 点 P における放物線 $\mathfrak{P}$ の接線の方程式は

$$y_0 y = 2p(x + x_0) \qquad \cdots\cdots(1.2.1)$$

で与えられることを示せ.

(2) ${y_0}^2 > 4px_0$ のとき, 点 P から放物線 $\mathfrak{P}$ に引いた 2 本の接線の接点を Q, R とする.
このとき, 直線 QR の方程式は

$$y_0 y = 2p(x + x_0) \qquad \cdots\cdots(1.2.2)$$

で与えられることを示せ.

(3) ${y_0}^2 < 4px_0$ のとき, 点 P を通る 2 本の直線 L_1, L_2 を $\mathfrak{P}$ の対称軸に平行でないように引く.
直線 L_1 と放物線 $\mathfrak{P}$ との交点を A_1, B_1 とし, 直線 L_2 と放物線 $\mathfrak{P}$ との交点を A_2, B_2 とする.
更に, 2 点 A_1, B_1 における接線の交点を Q_1, 2 点 A_2, B_2 における接線の交点を Q_2 とする.
このとき, 直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の方程式は

$$y_0 y = 2p(x + x_0) \qquad \cdots\cdots(1.2.3)$$

で与えられることを示せ.

【1.3】　調和共役性

円 $\mathfrak{C}: x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ に対して，$\mathfrak{C}$ 外部の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を極とする極線 $\mathfrak{L}: x_0x+y_0y=r^2$ を考える．
点 P を通る円 $\mathfrak{C}$ の任意の割線 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{C}$ との交点を A, B とし，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{L}$ との交点を Q とするとき，

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=\mathrm{QA}:\mathrm{QB} \iff \mathrm{PQ}=\frac{2}{\dfrac{1}{\mathrm{PA}}+\dfrac{1}{\mathrm{PB}}} \qquad \cdots\cdots(1.3.1)$$

が成り立つことを示せ．

【1.4】　方冪

円 $\mathfrak{C}: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$ と点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ に対して，

$$f(\mathrm{P})={x_0}^2+{y_0}^2-2ax_0-2by_0+a^2+b^2-r^2 \qquad \cdots\cdots(1.4.1)$$

を点 P における円 $\mathfrak{C}$ の**方冪**という．
(1)　$f(\mathrm{P})>0$ のとき，

$$f(\mathrm{P})=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}} \qquad \cdots\cdots(1.4.2)$$

が成り立つことを示せ．
ここで，A, B は円 $\mathfrak{C}$ 外部の点 P を通る任意の割線と $\mathfrak{C}$ との交点である．
(2)　$f(\mathrm{Q})<0$ のとき，

$$f(\mathrm{Q})=\overline{\mathrm{QA}}\times\overline{\mathrm{QB}} \qquad \cdots\cdots(1.4.3)$$

が成り立つことを示せ．
ここで，A, B は円 $\mathfrak{C}$ 内部の点 Q を通る任意の弦と $\mathfrak{C}$ との交点である．

座標変換 (拡大・縮小)

円錐曲線

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

は, 座標変換

$$x' = x/a \ \wedge \ y' = y/b \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

により, 曲線

$$(x')^2 \pm (y')^2 = 1 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

に移る.
この変換によって,

線分比は不変, 面積は $1/ab$ 倍

になる. また, 角の大きさは保存しないが平行な関係は保たれる.

【2.1】 楕円の補助円

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

の任意の接線に対して, 楕円 $\mathfrak{E}$ の 2 焦点から引いた垂線の足は常にある定円の周上にあることを示せ.
(この定円を楕円 $\mathfrak{E}$ の**補助円**という)

【2.2】 楕円の準円

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

に対して, 楕円 $\mathfrak{E}$ の外部の点 P から $\mathfrak{E}$ に引いた 2 本の接線が常に直交する.
このとき, 点 P の軌跡の方程式を求めよ. (P の軌跡を楕円 $\mathfrak{E}$ の**準円**という)

【2.3】 95 慶應義塾

座標 xy 平面の第 1 象限において, 長軸の長さ 4, 短軸の長さ 2 の楕円が x 軸, y 軸の両座標軸に接しながら可能なすべての範囲を動くとき, この楕円の中心の描く軌跡の方程式を求めよ.

【3.1】 双曲線の準円

双曲線

$$\mathfrak{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

に対して，点 P から $\mathfrak{H}$ に引いた 2 本の接線が直交するとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ．

(P の軌跡を双曲線 $\mathfrak{H}$ の**準円**という)

【3.2】 95 東大

(1) 双曲線

$$\mathfrak{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線が 2 本の漸近線と交わる点を A, B とする．

このとき，点 P は線分 AB の中点であることを示せ．

(2) (1) の P, A, B に対して，三角形 OAB の面積は点 P の位置に無関係に一定であることを示せ．

【3.3】 2000 お茶の水女子大

双曲線

$$\mathfrak{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \qquad \cdots\cdots(3.3.1)$$

上の点 P における接線が $\mathfrak{H}$ の漸近線 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ と交わる点をそれぞれ P_1, P_2 とする．

更に，$\mathfrak{H}$ 上の点 $\mathrm{Q}\,(\neq \mathrm{P})$ における接線と $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ との交点をそれぞれ Q_1, Q_2 とするとき，

$$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2 \ /\!/ \ \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1 \qquad \cdots\cdots(3.3.2)$$

が成り立つことを示せ．

【4.1】 89 図書館情報大

楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

に内接する四辺形の面積の最大値を求めよ.

【4.2】

楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

に外接する三角形 ABC があり，三角形 ABC の各辺の中点が楕円との接点である.

(1) 三角形 ABC の重心の座標を求めよ. (2) 三角形 ABC は一定の楕円に内接することを示せ.

【4.3】 93 名古屋市大

定点 $\mathrm{C}(0,a)$ $(a>0)$ を通る直線と楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

との交点を P, Q とするとき，線分 PQ の中点 R の描く軌跡の方程式を求めよ.

【4.4】 90 東大

座標平面上の円 C_0 と楕円 C_1 を

$$C_0: x^2+y^2=1, \qquad C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

として定義するとき，C_1 上の任意の点 P に対して，

P を頂点に持ち，C_0 に外接して C_1 に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を a, b の式で表せ.

軌跡の問題

(A) parameter を特定あるいは設定する

(B) parameter を消去して x, y の関係式を求める (**必要条件**)

(C) 動点の存在範囲を調べる (**十分性**)

【5.1】

放物線 $\mathfrak{P} : x^2 = 4py\ (p > 0)$ に対して，$\mathfrak{P}$ 上にない点 P から引いた 2 本の接線が直交する．
このとき，点 P の描く軌跡の方程式を求め，それが放物線 $\mathfrak{P}$ の準線 $y = -p$ であることを示せ．

【5.2】

放物線 $y = ax^2\ (a > 0)$ に対して，領域 $y < ax^2$ 内の点 P から引いた 2 本の接線の交角が θ を保って P が移動するとき，P の軌跡の方程式を求め，$\theta \to \pi/2$ としたときの軌跡の極限の図形を調べよ．ここで，$0 < \theta < \pi/2$ とする．

【5.3】

放物線 $y = ax^2\ (a > 0)$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha, a\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta, a\beta^2)$ における 2 本の接線の交点を P とする．
放物線と 2 本の接線が囲む領域の面積が一定値 C を満たして P が動くとき，その軌跡の方程式を求めよ．

焦点の性質

放物線の焦点: 放物線の対称軸に平行な入射光線は放物線で反射してその焦点に集まる

楕円の焦点: 楕円の一方の焦点から出た光線は楕円で反射して他方の焦点に集まる

双曲線の焦点: 双曲線の一方の焦点から出た光線は双曲線で反射して他方の焦点から出た光線と重なる

【6.1】

放物線 $\mathfrak{P} : y^2 = 4px \; (p \neq 0)$ の焦点を F で表し，放物線 $\mathfrak{P}$ 上の任意の点を $\mathrm{P}\,(\neq \mathrm{O})$ とする．
P における $\mathfrak{P}$ の接線は，直線 PF と P を通り放物線の対称軸に平行な直線との交角を 2 等分することを示せ.

【6.2】

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

の 2 焦点を F, F′ とする．$\mathfrak{E}$ 上の任意の点 P における接線は $\angle \mathrm{FPF}'$ の外角を 2 等分することを示せ.

【6.3】

双曲線

$$\mathfrak{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

の 2 焦点を F, F′ とする．$\mathfrak{H}$ 上の任意の点 P における接線は $\angle \mathrm{FPF}'$ を 2 等分することを示せ.

円錐曲線の定義

定点 F(**焦点**) と定直線 d (**準線**) に対して,

$$\mathrm{PF} = e \cdot \mathrm{dist}(\mathrm{P}, d) \qquad \cdots\cdots(7.1)$$

を満たす点 P の軌跡を円錐曲線という. このとき,

$$\begin{cases} 0 \leq e < 1 & \cdots\cdots \quad \text{楕円} \\ e = 1 & \cdots\cdots \quad \text{放物線} \\ 1 < e & \cdots\cdots \quad \text{双曲線} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(7.2)$$

であり, 定数 e を**離心率**という.

極方程式

円錐曲線はその焦点 F を極とし, 準線 d を始線に直交するように定めた極座標系で,

$$r = \frac{c}{1 + e \cdot \cos\theta} \quad (c = e \cdot \mathrm{dist}(\mathrm{F}, d)) \qquad \cdots\cdots(7.3)$$

と表示される. ただし, **焦点から準線に向けた方向を正方向**とする.

【7.1】 放物線の方程式

$\mathrm{F}(a, 0)$ を焦点, $d : x = -a$ を準線とする.
定義 (7.1) に基づいて放物線の方程式を a, x, y の関係式の形で求めよ.
更に, 放物線の極方程式を (7.3) の形で導き, (7.3) の c を a の式で表せ.

【7.2】 楕円の方程式

$\mathrm{F}(\pm ae, 0)$ を焦点, $d : x = \pm a/e$ を準線とする.
定義 (7.1) に基づいて楕円の方程式を a, e, x, y の関係式の形で求めよ.
更に, 楕円の極方程式を (7.3) の形で導き, (7.3) の c を a, e の式で表せ.

【7.3】 双曲線の方程式

$\mathrm{F}(\pm ae, 0)$ を焦点, $d : x = \pm a/e$ を準線とする.
定義 (7.1) に基づいて双曲線の方程式を a, e, x, y の関係式の形で求めよ.
更に, 双曲線の極方程式を (7.3) の形で導き, (7.3) の c を a, e の式で表せ.

【7.4】 parameter 表示

前三問で求めた円錐曲線上の点 (x, y) は t を parameter として,

$$\begin{cases} \text{放物線} & \cdots\cdots & x = at^2 \ \wedge \ y = 2at & (-\infty < t < \infty) \\ \text{楕円} & \cdots\cdots & x = a\cos t \ \wedge \ y = b\sin t & (-\infty < t < \infty) \\ \text{双曲線} & \cdots\cdots & x = a\sec t \ \wedge \ y = b\tan t & (t \neq \pi/2 \pmod{\pi}) \end{cases}$$

と parameter 表示できることを確認せよ.

【7.5】

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \qquad \cdots\cdots(7.5.1)$$

の焦点の 1 つを F$(c, 0)$ $(c > 0)$ とする.

F を通る楕円 $\mathfrak{E}$ の 2 つの弦 PQ, RS が直交するとき,

$$\frac{1}{\mathrm{PF} \times \mathrm{QF}} + \frac{1}{\mathrm{RF} \times \mathrm{SF}} \qquad \cdots\cdots(7.5.2)$$

の値が一定であることを示せ.

【7.6】

楕円

$$\mathfrak{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \qquad \cdots\cdots(7.6.1)$$

の焦点の 1 つを F$(c, 0)$ $(c > 0)$ とし，F を極とする $\mathfrak{E}$ の極線を $\mathfrak{g}$ で表す.

また，F を通る任意の直線と $\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{g}$ との交点を左から順に A, B, P とし，

$$\mathrm{AP} = r_1, \quad \mathrm{BP} = r_2, \quad \mathrm{FP} = r_3 \qquad \cdots\cdots(7.6.2)$$

で表すとき,

$$r_3 = \frac{2}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}} \ (\textbf{調和平均}) \quad (\Longleftrightarrow \ \mathrm{PA} : \mathrm{PB} = \mathrm{FA} : \mathrm{FB}) \qquad \cdots\cdots(7.6.3)$$

が成り立つことを示せ.

座標変換 (回転)

方程式

$$ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0 \qquad \cdots\cdots(8.1)$$

で与えられる曲線は, 行列

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ \mathbf{N}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ {}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}=(p\ \ q),\ {}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=(x\ \ y)$$

を用いて,

$${}^{\mathrm{T}}\mathbf{XMX}+{}^{\mathrm{T}}\mathbf{NX}+r=0 \qquad \cdots\cdots(8.2)$$

と表せる.

このとき, $\mathbf{M}$ を対角化する 2 次行列で

$${}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}\ \left(\Leftrightarrow\ {}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{E}\right)\ \wedge\ \det.\mathbf{P}=1 \qquad \cdots\cdots(8.3)$$

を満たす $\mathbf{P}$ により, 変換

$$\mathbf{X}=\mathbf{PX}'\ \left(\Leftrightarrow\ \mathbf{X}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\right) \qquad \cdots\cdots(8.4)$$

即ち, $\mathbf{X}'$ を回転 $\mathbf{P}$ で $\mathbf{X}$ に移す変換を与えれば,

$${}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}'(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP})\mathbf{X}'+({}^{\mathrm{T}}\mathbf{NP})\mathbf{X}'+r=0 \qquad \cdots\cdots(8.5)$$

ここで, ${}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}'=(x'\ \ y')$ と表せば,

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+p'x'+q'y'+r=0 \qquad \cdots\cdots(8.6)$$

の形式に帰着する. ここで, $(p'\ \ q')={}^{\mathrm{T}}\mathbf{NP}$ である.

曲線の判別式

方程式 $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ の表す図形は,

$$\det.\mathbf{M}>0 \cdots \textbf{楕円},\quad \det.\mathbf{M}=0 \cdots \textbf{放物線},\quad \det.\mathbf{M}<0 \cdots \textbf{双曲線} \qquad \cdots\cdots(8.7)$$

と分類される**円錐曲線**である.

【8.1】 3 次行列表現

2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2+2px+2qy+r=0$ は,

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{pmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(8.1.1)$$

を用いて,

$${}^{\mathrm{T}}\mathbf{XMX}=0 \qquad \cdots\cdots(8.1.2)$$

の形に表せることを確認せよ.

【8.2】 標準化

次の 2 次曲線を標準化せよ.

(1) $7x^2+48xy-7y^2+20x-110y-50=0$

(2) $11x^2+4xy+14y^2-4x-28y-16=0$

(3) $x^2-4xy+4y^2-6x-8y+5=0$

【8.3】 94 工学院大

曲線

$$\left(10+3\sqrt{3}\right)x^2+6xy+\left(10-3\sqrt{3}\right)y^2=16$$

は楕円を表すことを示せ．また，その焦点の座標を求めよ.

【8.4】 92 九州芸工大

xy 平面上の 2 次曲線

$$x^2+2axy+y^2+2x-8y+b=0 \qquad \cdots\cdots(8.4.1)$$

を平行移動し，更に，原点中心に角 θ $(0\leq\theta\leq\pi/2)$ 回転して得られる曲線が

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1 \qquad \cdots\cdots(8.4.2)$$

であるとき，a, b, θ の値を求めよ.

【8.5】 95 千葉大

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,-1)$, $\mathrm{B}(1,1)$ からの距離の和が 10 である点 P の軌跡を $\mathfrak{C}$ とする.

(1) $\mathfrak{C}$ の方程式は $ax^2+by^2+cxy=1$ の形となる．このとき，a, b, c の値を求めよ.

(2) $\mathfrak{C}$ を原点の周りに -45° 回転させた曲線を表す方程式を x, y の関係式の形で求めよ.