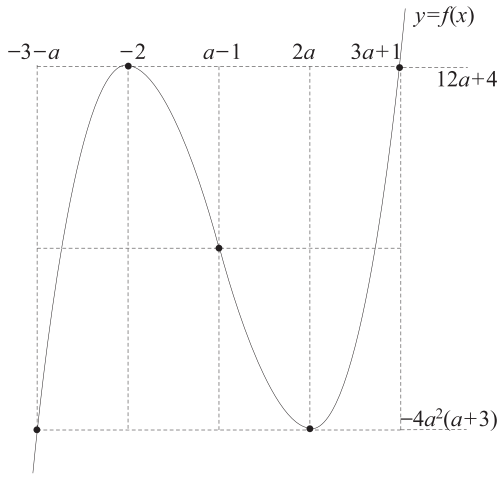
【1.1】

関数 $f(x)=x^3+3(1-a)x^2-12ax\ (a>0)$ について考える．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) $-3\leq x\leq 4a$ における $|\,f(x)|$ の最大値を a を用いて表せ．

【解答】



(1) $f(x)=x^3+3(1-a)x^2-12ax$ より，

$$f'(x)=3(x^2+2(1-a)x-4a)=3(x+2)(x-2a)$$

従って，極大値は $f(-2)=12a+4\ (>0)$,
極小値は $f(2a)=-4a^2(a+3)\ (<0)$ である．**(右図)**

(2) $f(0)=0$ より，$f(x)$ は原点を通る．更に，
$f(x)$ の極大点 $x=-2$ と極小点 $x=2a$ の中点 $x=a-1$ が曲線の変極点であるので，変曲点と原点との位置関係で以下のように分類する．**(次頁図参照)**

(A) $a-1<0$ の場合;

$$4a-(3a+1)=a-1<0 \iff 4a<3a+1$$

より，定義域 $[-3,\,4a]$ の両端 $x=4a,\ -3$ について，

$$2a<4a<3a+1\ \wedge\ -3-a<-3<-2 \quad (\because\ a>0)$$

なる関係が成り立ち，$-3\leq x\leq 4a$ における最大値は $f(-2)=12a+4$ である．

(B) $a-1>0$ の場合;

$$4a-(3a+1)=a-1>0 \iff 4a>3a+1$$

となり，$[-3,\,4a]$ における最大値は，$\max\bigl(f(4a),\,|\,f(2a)|\bigr)$ であるから，

$$f(4a)-|\,f(2a)|=f(4a)-4a^2(a+3)=12a^2(a-1)>0 \iff f(4a)>|\,f(2a)|$$

を考慮して，最大値は $f(4a)=16a^3$ である．

(C) $a-1=0$ の場合;

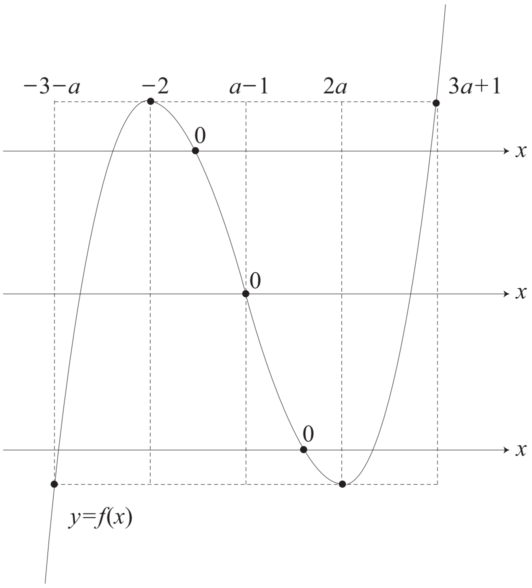
変曲点と原点は重なり，

$$x=-2\ \vee\ x=2a=2\ \vee\ x=3a+1=4a=4$$

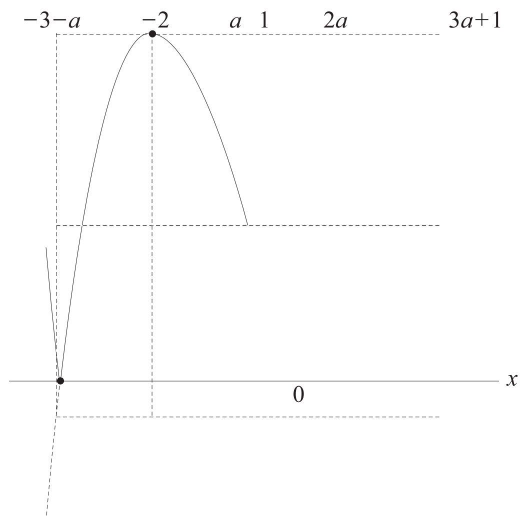
の 3 個所で最大値 16 をとる．

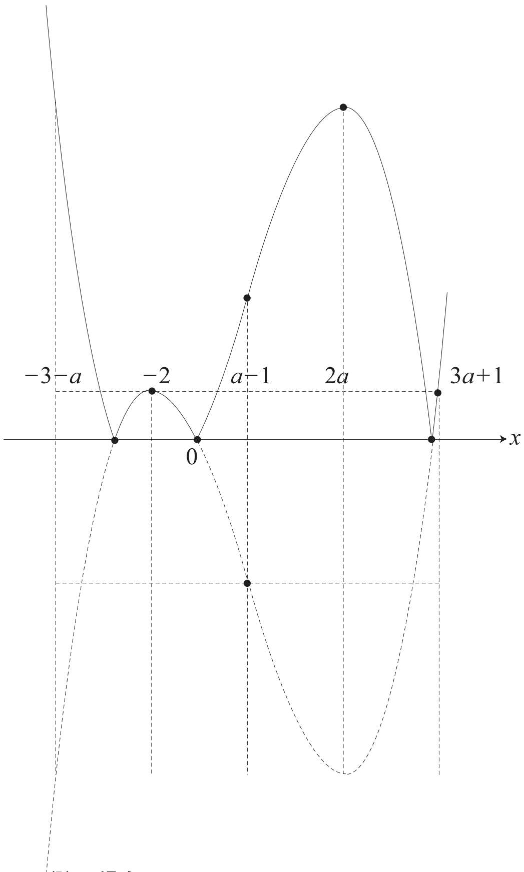
以上により，

$$\max.|\,f(x)|=\begin{cases} 16a^3 & (a>1) \quad (x=4a) \\ 16 & (a=1) \quad (x=\pm2,\,4) \\ 12a+4 & (0<a<1) \quad (x=-2) \end{cases}$$

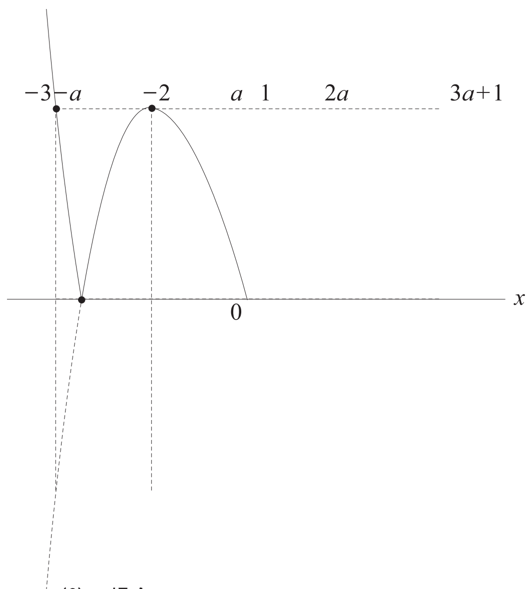


(A)の場合





(B)の場合



(C)の場合

【1.2】

関数 $f(x)=x^3-x$ の表す平面上の曲線を $\mathfrak{C}$ とする．
また，$\mathfrak{C}$ を x 軸の正方向に $a\,(>0)$ だけ平行移動した曲線を $\mathfrak{C}_a$ とする．
(1) $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_a$ が異なる 2 点で交わるための a の値の範囲を求めよ．
(2) (1) のとき，$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_a$ で囲まれた領域の面積 S を a の式で表せ．
(3) S を最大にする a の値とその最大値を求めよ．

【解答】

(1) 2 曲線

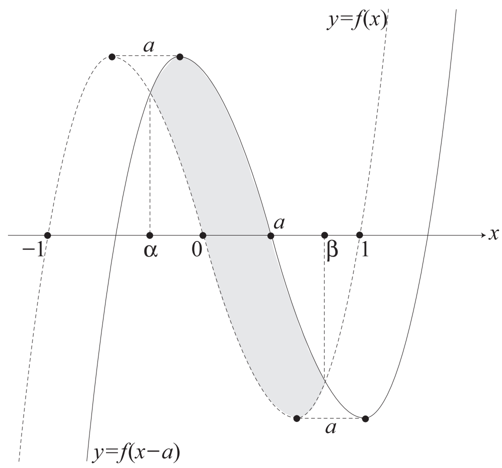
$$\begin{cases} \mathfrak{C} : y=x^3-x & \cdots\cdots(2.1) \\ \mathfrak{C}_a : y=(x-a)^3-(x-a) & \cdots\cdots(2.2) \end{cases}$$

が異なる 2 点で交わるのは，x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^3-x&=(x-a)^3-(x-a) \\ &\iff a(3x^2-3ax+a^2-1)=0 \\ &\iff 3x^2-3ax+a^2-1=0 \quad \cdots\cdots(2.3) \end{aligned}$$

が異なる 2 個の実数解を持つときである．
従って，条件 $a>0$ と (2.3) の判別式から，

$$a>0 \ \wedge \ (3a)^2-12(a^2-1)>0 \iff 0<a<2 \ \cdots\cdots(2.4)$$



(2) $0<a<2$ のとき，(2.3) の実数解を α, β $(\alpha<\beta)$ と置くと，

$$\begin{aligned} S&=\int_\alpha^\beta \left\{(x-a)^3-(x-a)-(x^3-x)\right\}\mathbf{d}x=-a\int_\alpha^\beta \left(3x^2-3ax+a^2-1\right)\mathbf{d}x \\ &=-3a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,\mathbf{d}x=\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots\cdots(2.5) \end{aligned}$$

一方，(2.3) における解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=a \ \wedge \ \alpha\beta=\frac{a^2-1}{3} \qquad \therefore\ \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\frac{4-a^2}{3}} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.5), (2.6) より，

$$S=\frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{a(4-a^2)^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(3) $0<a<2$ において，

$$a\left(4-a^2\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^2(4-a^2)^3} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

より，$a^2(4-a^2)^3$ の最大値を求める．
$4-a^2=t$ と置き，

$$g(t)=(4-t)t^3=4t^3-t^4 \quad (0<t<4) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

の最大値を調べる．

$$g'(t)=12t^2-4t^3=-4t^2(t-3) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

(2.10) により，$t=3$ のとき，即ち，$a=1$ のとき S は最大となり，

$$\max.S=\frac{\sqrt{27}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

【1.3】

平面上の 2 曲線

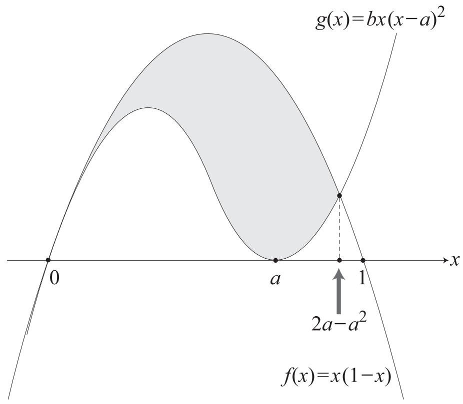
$$y = x(1-x), \quad y = bx(x-a)^2 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

が原点において共通の接線を持ち，更に，x 座標が正の点で再び交わっている．

(1) a, b の満たすべき条件を求めよ．

(2) 2 曲線で囲む領域の面積を最大にする a の値とその最大値を求めよ．

【解答】



(1) 2 曲線

$$f(x) = x(1-x), \quad g(x) = bx(x-a)^2$$

が $x=0$ において共通接線を持つための必要十分条件は,

$$f(0) = g(0) \ \wedge \ f'(0) = g'(0) \iff f'(0) = g'(0)$$
$$\iff 1 = a^2 b \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

ここで,

$$f'(x) = 1-2x, \quad g'(x) = b(x-a)^2 + 2bx(x-a)$$

である．また,

$$f(x) = g(x) \iff x(1-x) = \frac{1}{a^2}x(x-a)^2 \iff x^2\{x-(2a-a^2)\} = 0 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

より，原点以外の交点の座標は $x = 2a-a^2$ である．

題意より，交点の x 座標が正であるから,

$$2a-a^2 > 0 \iff 0 < a < 2 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.2), (3.4) より，求めるべき条件は,

$$a^2 b = 1 \ \wedge \ 0 < a < 2 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(2) 2 曲線の囲む領域の面積を S で表せば,

$$S = -\frac{1}{a^2}\int_0^{2a-a^2} x^2\{x-(2a-a^2)\}\,\mathbf{d}x = -\frac{1}{a^2}\times\left(-\frac{1}{12}\right)(2a-a^2)^4 = \frac{1}{12}\underline{\underline{a^2(2-a)^4}} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

ここで，(3.6) の二重下線部を $h(a)$ と置けば,

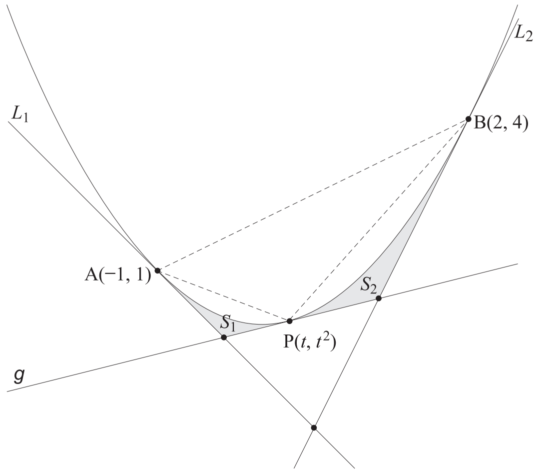
$$h'(a) = 2a(a-2)^4 + 4a^2(a-2)^3 = 2a(a-2)^3(3a-2) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.7) より，$h(a)$ は $a = \dfrac{2}{3}$ で極大かつ最大.

$$\therefore \ \max.h(a) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{2^{10}}{3^6} \qquad \therefore \ \max.S = \frac{1}{12}\times\frac{2^{10}}{3^6} = \frac{2^8}{3^7} = \frac{256}{2187} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

【1.4】

xy 平面上に放物線 $\mathfrak{C}: y=x^2$ と $\mathfrak{C}$ 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 4)$ および動点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(-1<t<2)$ がある. 3 点 A, B, P における $\mathfrak{C}$ の接線を $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ および $\mathfrak{g}$ で表し, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{C}$ で囲まれる部分の面積を S_1, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{C}$ で囲まれる部分の面積を S_2 で表すとき, S_1+S_2 の最小値を求めよ.



【解答】

$\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{C}$ で囲まれる部分の面積が S_1 のとき, $\mathfrak{C}$ と弦 AP で囲まれる部分の面積は $2S_1$ と表され, 同様に, $\mathfrak{C}$ と弦 BP で囲まれる部分の面積は $2S_2$ と表される.
そこで, S_1+S_2 の値を最小にするには, $2S_1+2S_2$ を最小にすればよく, 即ち, 三角形 APB の面積を最大にすればよい.
いま, $\mathfrak{C}$ とその弦 AB で囲まれる部分の面積は, 直線 AB の方程式を $y=mx+n$ として,

$$\int_{-1}^{2}(mx+n-x^2)\,\mathbf{d}x=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,\mathbf{d}x=\frac{9}{2} \quad \cdots\cdots(4.1)$$

三角形 APB の面積が最大となるのは, P から AB に下ろした垂線の長さが最大となるときであり, 即ち, P における $\mathfrak{C}$ の接線の傾きが弦 AB と平行となるときである. そこで,

$$y'_{x=t}=2t=1\,(\text{AB の傾き}) \iff t=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

このとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\begin{pmatrix}-3/2\\3/4\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\begin{pmatrix}3/2\\15/4\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

であるから, 最大化した三角形 APB の面積は,

$$\frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}-\frac{-3}{2}\times\frac{15}{4}\right|=\frac{27}{8} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

(4.1), (4.4) により,

$$\min.(S_1+S_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-\frac{27}{8}\right)=\frac{9}{16} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

【別解】 – 標準的な解答 –

接線 $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{L}_2$ の方程式はそれぞれ

$$y=-2x-1,\quad y=2tx-t^2,\quad y=4x-4 \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

であるから,

$$S_1=\int_{-1}^{\frac{-1+t}{2}}\left(x^2-(-2x-1)\right)\mathbf{d}x+\int_{\frac{-1+t}{2}}^{t}\left(x^2-(2tx-t^2)\right)\mathbf{d}x$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{\frac{-1+t}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_{\frac{-1+t}{2}}^{t}=\frac{2}{3}\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

更に,

$$S_2=\int_{t}^{\frac{t+2}{2}}\left(x^2-(2tx-t^2)\right)\mathbf{d}x+\int_{\frac{t+2}{2}}^{2}\left(x^2-(4x-4)\right)\mathbf{d}x$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_{t}^{\frac{t+2}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{t+2}{2}}^{2}=\frac{2}{3}\left(\frac{2-t}{2}\right)^3 \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(4.7), (4.8) により,

$$S_2+S_2=\frac{1}{12}\{(t+1)^3+(2-t)^3\}\overset{\text{put}}{=}u(t) \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

このとき,

$$u'(t)=\frac{1}{4}\{(t+1)^2-(2-t)^2\}=\frac{3}{4}(2t-1) \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

より, $u(t)$ は $t=\dfrac{1}{2}$ で極小かつ最小.

$$\therefore\ \min.(S_1+S_2)=\frac{1}{12}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3\times 2=\frac{9}{16} \qquad \cdots\cdots(4.11)$$