【2.1】

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して，xy 平面上の点 A, B を次のように定める．

$$\mathrm{A}\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)},\ -2\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{2t}{3},\ -2t\right) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

実数 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき，線分 AB の通過し得る領域を図示せよ．
また，その領域の面積を求めよ．

【解答】

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \left(\frac{2}{3(t+1)},\ 2(t-1)\right) = \frac{2}{3(t+1)}\begin{pmatrix}1\\ 3(t^2-1)\end{pmatrix}$$

より，直線 AB の方向ベクトルを $(1,\ 3(t^2-1))$ としてよい．
このとき，直線 AB の方程式は，

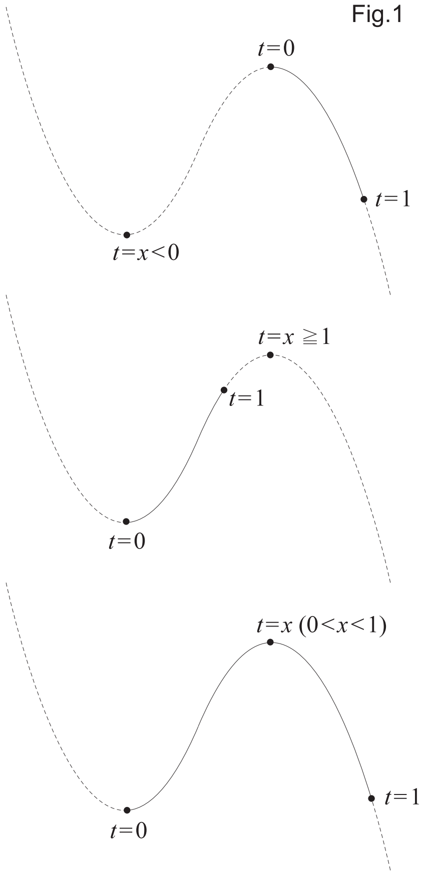
$$y = 3(t^2-1)\left(x-\frac{2}{3}t\right)-2t \iff y = -2t^3+3xt^2-3x \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(1.2) において x を定数と考え，t の関数として $y(t)$ と表せば，

$$y(t) = -2t^3+3xt^2-3x \quad (0 \leq t \leq 1) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

$y(t)$ のとり得る値の範囲を調べて直線 AB の通過領域を求める．

Fig.1



$y'(t) = -6t(t-x)$ より，$y(t)$ のグラフは [Fig.1] の 3 通りになる．

● $x<0$ の場合:

上図より，$y(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ で単調減少．

$$\therefore\ y(0) \geq y(t) \geq y(1) \iff -3x \geq y \geq -2 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

● $x \geq 1$ の場合:

中図より，$y(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ で単調増加．

$$\therefore\ y(0) \leq y(t) \leq y(1) \iff -3x \leq y \leq -2 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

● $0<x<1$ の場合:

下図より，$0 \leq t \leq 1$ 内の点 $t=x$ において極大かつ最大．

$$\therefore\ \min\bigl(y(0),\ y(1)\bigr) \leq y(t) \leq y(x)$$
$$\iff \min(-3x,\ -2) \leq y \leq x^3-3x \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

● $x=0$ の場合:

$y(t)$ は $(-\infty,\ \infty)$ で単調減少となるので，

$$y(0) \geq y(t) \geq y(1) \iff -3x \geq y \geq -2 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

(1.4), (1.5), (1.6), (1.7) により，
直線 AB の通過領域は次頁 [Fig.2] の網目部分全体である．

次に，線分 AB の端点 A, B の軌跡を調べる．

$$\mathrm{B}: x=\frac{2t}{3},\ y=-2t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

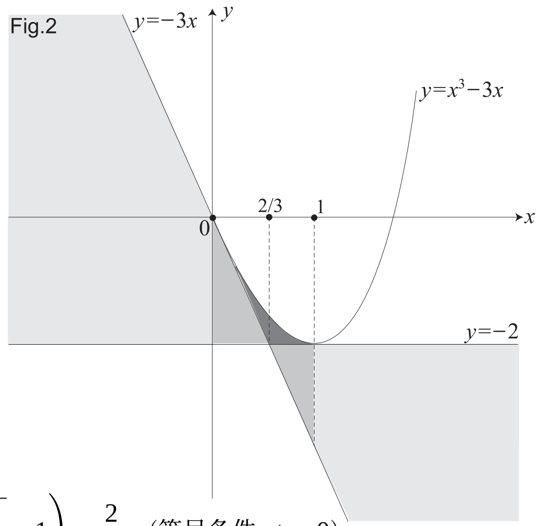
より，

$$y=-3x \ \wedge\ -2 \leq y \leq 0 \ \wedge\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

更に，

$$\mathrm{A}: x=\frac{2}{3}\left(t+\frac{1}{t+1}\right),\ y=-2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

より，A は直線 $y=-2$ 上を動き，



$$x=\frac{2}{3}\left(t+1+\frac{1}{t+1}-1\right) \geq \frac{2}{3}\left(2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{1}{t+1}}-1\right)=\frac{2}{3} \quad (\text{等号条件}: t=0)$$

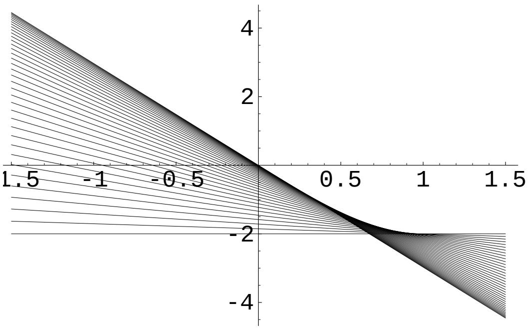
より，A の軌跡は，

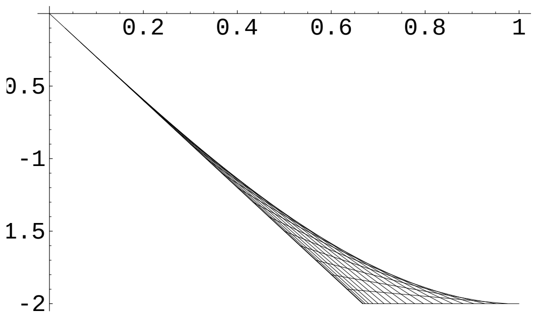
$$y=-2 \ \wedge\ \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

(1.8), (1.9) と前頁の結果を合わせて，
線分 AB の通過領域は [Fig.2] の一番濃い網目部分であり，この領域の面積は

$$\int_0^1 (x^3-3x-(-2))\,\mathbf{d}x-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times 2=\frac{1}{12} \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

[Note]　下図は直線 AB 全体の軌跡，線分 AB の軌跡を出力したものである．





【2.2】

曲線 $\mathfrak{C}: y = x^4 - 2x^2 + a$ が異なる 2 点で x 軸に接している.

(1) a の値を求めよ.

(2) $\mathfrak{C}$ と直線 $\mathfrak{L}: y = b\ (0 < b < a)$ とで囲まれる 3 つの領域について,

$\mathfrak{L}$ の上側にある領域の面積が $\mathfrak{L}$ の下側にある 2 つの領域の面積の和に等しいとき, b の値を求めよ.

【解答】

(1) $\mathfrak{C}$ は y 軸対称なので x 軸との接点を $x = \pm t\ (t > 0)$ と置ける.

即ち,

$$x^4 - 2x^2 + a = (x-t)^2(x+t)^2 = (x^2 - t^2)^2 = x^4 - 2t^2x^2 + t^4 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(2.1) の両辺の係数を比較して,

$$t^2 = 1 \ \wedge\ a = t^4 \iff t = 1\,(>0) \ \wedge\ a = 1 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2) $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$ の交点を $x = \pm\alpha,\ \pm\beta\ (0 < \alpha < \beta)$ と表す.

題意の面積に関して,

$$\int_0^\beta (x^4 - 2x^2 + 1 - b)\,\mathbf{d}x = 0 \iff \frac{1}{5}\beta^5 - \frac{2}{3}\beta^3 + (1-b)\beta = 0 \iff 3\beta^4 - 10\beta^2 + 15(1-b) = 0 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

一方, β は方程式 $x^4 - 2x^2 + 1 - b = 0$ の $\beta > 1$ なる解であるから,

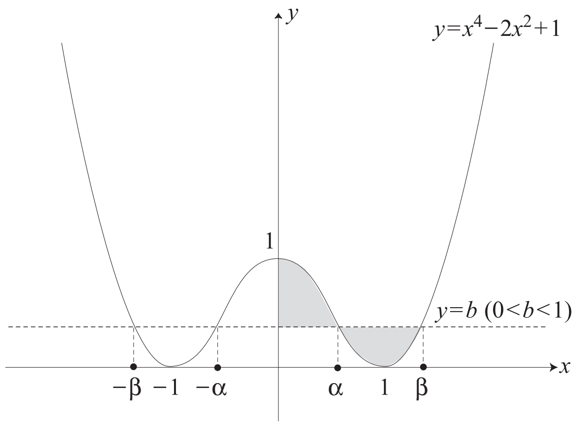
$$\beta > 1 \ \wedge\ \beta^4 - 2\beta^2 + 1 - b = 0 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.3), (2.4) より b を消去して,

$$\beta > 1 \ \wedge\ 3\beta^4 - 10\beta^2 + 15(2\beta^2 - \beta^4) = 0 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) を解いて,

$$\beta^2 = \frac{5}{3} \ \wedge\ b = \beta^4 - 2\beta^2 + 1 \iff \beta = \sqrt{\frac{5}{3}} \ \wedge\ b = \frac{4}{9} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$



【2.3】

関数 $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を

$$u_1(x)=x^3-3x,\quad u_{n+1}(x)=\{u_n(x)\}^3-3u_n(x)\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

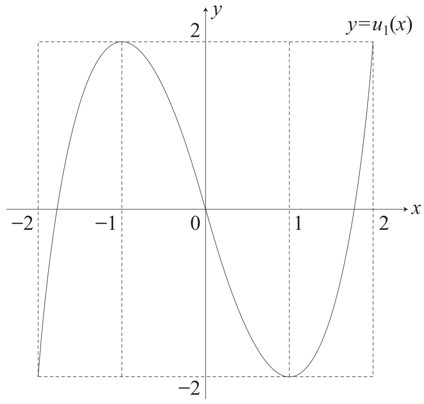
によって定義するとき，以下の問いに答えよ.

(1) 実数 a に対して，$u_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ.

(2) 実数 a に対して，$u_2(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ.

(3) $n\,(\geq 3)$ を整数とするとき，$u_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ.

【解答】



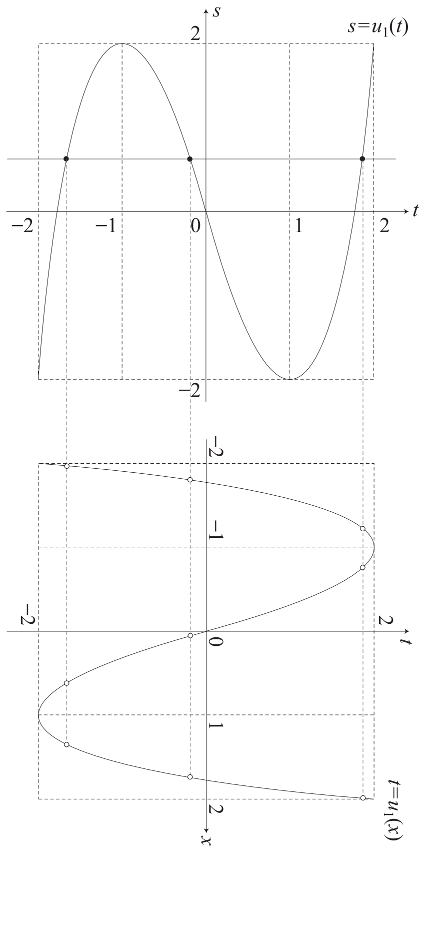
(1) $u_1(x)$ は奇関数であり，

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}u_1(x)=3(x+1)(x-1)$$

より，$y=u_1(x)$ のグラフは**右上図**である.

このグラフと直線 $y=a$ との交点を調べて，

$$\begin{cases} |a|>2 & \cdots \quad 1\text{個} \\ |a|=2 & \cdots \quad 2\text{個} \\ |a|<2 & \cdots \quad 3\text{個} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$



(2) $t=u_1(x)$ と置くと，

$$u_2(x)=a \iff \begin{cases} u_1(t)=a & \cdots\cdots(3.2) \\ t=u_1(x) & \cdots\cdots(3.3) \end{cases}$$

と書き換えられるので，

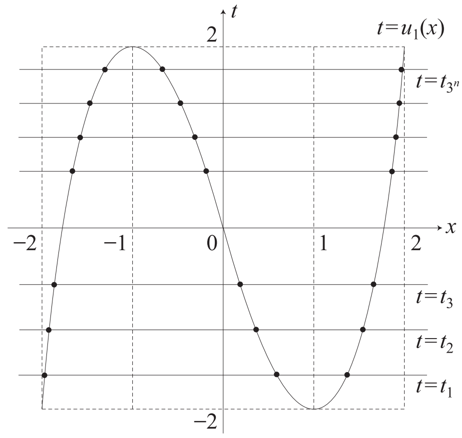
ts 平面上の 3 次曲線 $s=u_1(t)$ と，

xt 平面上の 3 次曲線 $t=u_1(x)$ の対応関係を調べて (**右下図**),

$$\begin{cases} |a|>2 & \cdots \quad 1\text{個} \\ |a|=2 & \cdots \quad 5\text{個} \\ |a|<2 & \cdots \quad 9\text{個} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3) a を $-2<a<2$ なる任意の実数として，$n \geq 1$ のとき，

$u_n(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数が 3^nである $\cdots\cdots(3.5)$



ことを**帰納法**で示せば，$a=0 \land n \geq 3$ として題意の証明を得る．
$n=1$ のとき，(3.1) により命題 (3.5) は正しい．
そこで，ある正整数 n に対して，(3.5) が成り立つと仮定する．
このとき，$u_1(x)=t$ と置けば，

$$u_{n+1}(x)=a \iff \begin{cases} u_n(t)=a & \cdots\cdots(3.6) \\ t=u_1(x) & \cdots\cdots(3.7) \end{cases}$$

と書き換えられ，帰納法の仮定により，
(3.6) を満たす異なる実数 t は $|\,t\,|<2$ の範囲に 3^n 個存在する．
それを $t_1, t_2, \cdots, t_{3^n}$ と表せば，各 t_k 対して (3.7) を満たす実数 x は 3 個ずつ存在する．
また，$u_1()$ の $-2 \leq x \leq -1$ における単調増加性，$-1 \leq x \leq 1$ における単調減少性，
$1 \leq x \leq 2$ における単調増加性を考慮すれば，$3^n \times 3$ 個の (3.7) の解 x は互いに重複することはない．
従って，$u_{n+1}(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数は 3^{n+1} となるので，(3.5) は $n+1$ に対しても成立する．
以上より，すべての正整数 n と実数 a $(-2<a<2)$ に対して，命題 (3.5) は正しい．

【別証】 – Chebysev の多項式 –

$0<\theta<\pi$ なる θ に対して，$x=2\cos\theta$ と置けば，

$$u_1(x)=(2\cos\theta)^3-3\cdot 2\cos\theta=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=2\cos(3\theta),$$

$$u_2(x)=(u_1(x))^3-3u_1(x)=2(4\cos^3(3\theta)-3\cos(3\theta))=2\cos(3^2\theta) \quad \cdots\cdots(3.8)$$

であるから帰納的に，

$$u_n(x)=2\cos(3^n\theta) \quad (x=2\cos\theta\ (0<\theta<\pi)) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

が成り立つ．
このとき，

$$u_n(x)=0 \iff \cos(3^n\theta)=0 \quad (0<3^n\theta<3^n\pi)$$

$$\iff 3^n\theta=\frac{(2k-1)\pi}{2} \quad (k=1, 2, \cdots, 3^n)$$

$$\iff \theta=\frac{(2k-1)\pi}{2\cdot 3^n} \quad (k=1, 2, \cdots, 3^n) \quad \cdots\cdots(3.10)$$

(3.10) により，題意の方程式を満たす x は，

$$x=2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2\cdot 3^n} \quad (k=1, 2, \cdots, 3^n) \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

の 3^n 個である．

【2.3】

直線 $6x-2y+1=0$ 上の点 $\mathrm{P}(p, q)$ から放物線 $y=x^2$ に引ける法線の個数について調べよ.

【解答】

曲線上の点 $x=t$ における接線方向の vector は, $(1, 2t)$ であるから法線の方程式は,

$$\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-t\\y-t^2\end{pmatrix}=0 \iff x+2ty-t-2t^3=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

法線①が指定された点 (p, q) を通るので,

$$2t^3+(1-2q)t-p=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

一方, (p, q) が直線 $6x-2y+1=0$ 上の点であることから,

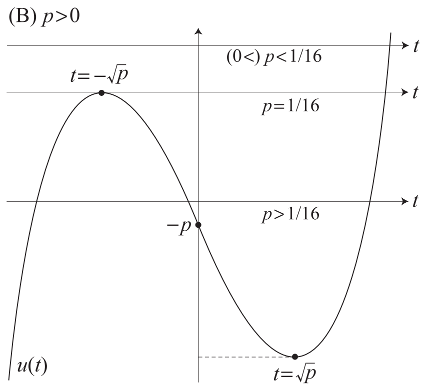
$$6p-2q+1=0 \iff 1-2q=-6p \qquad \cdots\cdots ③$$

③を②に代入して,

$$2t^3-6pt-p=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

従って,

方程式④の異なる実数解の個数が題意の法線の個数である $\cdots\cdots(*)$



そこで, $u(t)=2t^3-6pt-p$ の graph を利用して,
方程式④の実数解の個数を調べる.

$$u'(t)=6t^2-6p=6(t^2-p)$$

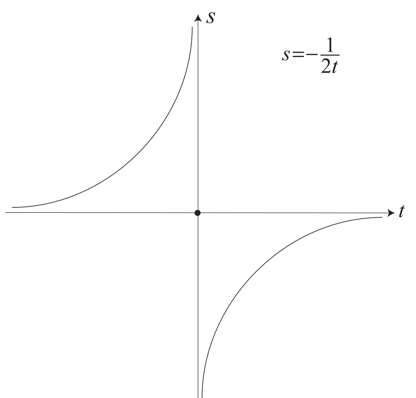
より, 次の (A), (B) の場合に分けて考える.

(A) $p\leqq 0$ の場合; $u'(t)\geqq 0$ より, $u(t)$ は単調増加.

$$\therefore\ ④の実数解は 1 個$$

(B) $p>0$ の場合; $u(t)$ の極大値, 極小値に注目して,

$$\begin{aligned} u(-\sqrt{p})\times u(\sqrt{p})<0 &\iff (4p\sqrt{p}-p)(-4p\sqrt{p}-p)<0 \\ &\iff (4\sqrt{p}-1)(4\sqrt{p}+1)>0 \\ &\iff p>\frac{1}{16} \end{aligned}$$



このとき, 極大点と極小点の間を t 軸が通り, ④の実数解は 3 個.
従って, **右上図**より,

$$p>\frac{1}{16}\ \cdots 3 個,\ \ p=\frac{1}{16}\ \cdots 2 個,\ \ p<\frac{1}{16}\ \cdots 1 個 \qquad \cdots\cdots\textbf{[答]}$$

[注] 放物線 $y=x^2$ 上の点 $x=t$ における法線の傾きは $-\dfrac{1}{2t}$ であり, t の関数 $-\dfrac{1}{2t}$ は**右下図**の graph より, $t<0$, $t>0$ それぞれの範囲で単調増加かつ 1 対 1 対応である. 故に, 方程式④の異なる実数解 t に対して, 異なる法線が対応すると考えてよく, これは $t=0$ の場合を含めて成り立っている. 即ち, $(*)$ は妥当である.

【2.4】

定数 $a\,(>0)$ に対して，x の 3 次方程式

$$2x^3+3(a-1)x^2-6ax=k \quad (a>0) \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

が実数解 $x_1,\ x_2,\ x_3\ (x_1\leq x_2\leq x_3)$ を持つものとする．
実数 k が変化するとき，

$$|x_1|+|x_2|+|x_3| \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

の最大値が 3 となるような a の値を求めよ．

【解答】

$2x^3+3(a-1)x^2-6ax \overset{\text{put}}{=} u(x)$.
$u(0)=0$ より，3 次曲線 $y=u(x)$ は原点を通過する．
方程式 (4.1) の実数解が (重複を含めて) 3 個存在するので，
2 図形 $y=u(x)$, $y=k$ の共有点も (接点を含めて) 3 個存在し，
[Fig.1] および [Fig.2] より，

$$(u(1)=)-(3a+1)\leq k\leq a^2(a+3)\,(=u(-a)) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

であることが必要．
このとき，x_2 の符号により次の 2 通りに分類する．
(A) $\big(0<a<1 \wedge k<0\big) \vee \big(1<a \wedge k<0\big)$ の場合;

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|=-x_1+x_2+x_3 \quad (\because\ x_2>0) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

ここで，3 次方程式 (4.1) の**解と係数の関係**により，

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{3(a-1)}{2} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

(4.4), (4.5) により，

$$\begin{aligned}|x_1|+|x_2|+|x_3|&=-2x_1-\frac{3(a-1)}{2}\\&\leq -2\cdot\frac{-1-3a}{2}-\frac{3(a-1)}{2}=\frac{3a+5}{2}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(B) $\big(0<a<1 \wedge k>0\big) \vee \big(1<a \wedge k>0\big)$ の場合;

$$\begin{aligned}|x_1|+|x_2|+|x_3|&=-(x_1+x_2)+x_3 \quad (\because\ x_2<0)\\&=\frac{3(a-1)}{2}+2x_3 \quad (\because\ (4.5))\\&\leq\frac{3(a-1)}{2}+2\cdot\frac{3+a}{2}=\frac{5a+3}{2}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(4.6), (4.7) により，(4.2) の最大値は，

$$\max\left(\frac{3a+5}{2},\ \frac{5a+3}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

ここで，a の関数 (4.8) を ab 平面に図示して [Fig.3] を得る．
従って，(4.2) の最大値が 3 となる a の値は，

$$a=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

Fig.1

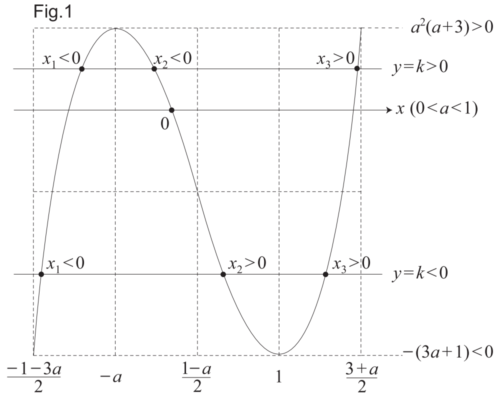


Fig.2

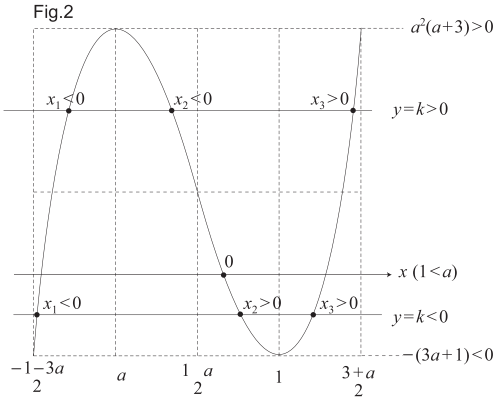


Fig.3