【3.1】

関数

$$f(t)=\int_t^{t+1}|x^2-1|\,\mathbf{d}x$$

を最小にする t の値を求めよ.

【解答】

$y=|x^2-1|$ のグラフの y 軸対称性から, $t\geq -\dfrac{1}{2}$ で考えれば十分である.

(A) $-\dfrac{1}{2}\leq t\leq 0$ の場合; (Fig.1)

$x^2-1\overset{\text{put}}{=}u(x)$, $\dfrac{1}{3}x^3-x\overset{\text{put}}{=}U(x)$ とする.

$$f(t)=-\int_t^{t+1}u(x)\,\mathbf{d}x=-\Big[U(x)\Big]_t^{t+1}=U(t)-U(t+1) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

ここで,

$$U(t)=\frac{1}{3}t^3-t,\quad U(t+1)=\frac{1}{3}(t+1)^3-(t+1) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

であるから,

$$f(t)=-t^2-t+\frac{2}{3}=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{12} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

従って, $f(t)$ はこの区間で**単調減少**.

(B) $1\leq t$ の場合;

$$f(t)=\int_t^{t+1}u(x)\,\mathbf{d}x=\Big[U(x)\Big]_t^{t+1}=U(t+1)-U(t) \qquad \therefore\ f(t)=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{12} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

従って, $f(t)$ はこの区間で**単調増加**.

(C) $0\leq t\leq 1$ の場合; (Fig.2)

$$f(t)=-\int_t^1 u(x)\,\mathbf{d}x+\int_1^{t+1}u(x)\,\mathbf{d}x=-\Big[U(x)\Big]_t^1+\Big[U(x)\Big]_1^{t+1}=U(t+1)+U(t)-2U(1)$$

$$\iff f(t)=\frac{2}{3}t^3+t^2-t+\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

このとき, $f'(t)=2t^2+2t-1=0$ より,

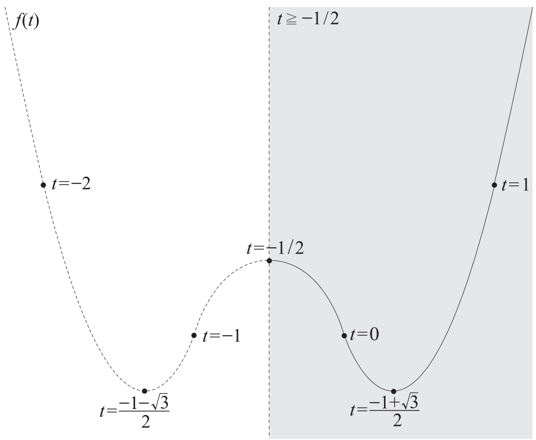
$$t=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\quad (\because\ 0\leq t\leq 1) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

即ち, $f(t)$ は $t=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ において**極小かつ最小**.

更に, 対称性を考慮すれば $-\infty<t<\infty$ において,

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

の 2 個所で最小値をとる. **(右図)**



[Note]　前頁の計算による面積 $f(t)$ の増減は図形的に解釈できる．
(A) の場合，$f(t)$ の表す面積は $-1/2 \leq t \leq 0$ なる範囲の t に対して，
t の増加に伴う面積の減少分が面積の増加分を上回り，$f(t)$ は単調減少となる．(Fig.3)
(B) の場合，$1 \leq t$ において，$f(t)$ の表す面積は明らかに単調増加である．(図で説明するまでもない)
(C) の場合，$f(t)$ の表す面積は $-u(t_0) = u(t_0+1)$ なる t_0で最小化されることが図形的に解釈できる．(Fig.4)
何故なら，$t_0 \to t$ なる変化に伴う面積の増加分は減少分を上回り，常に，$f(t_0) < f(t)$ が成り立つからである．
このことは区間 $[t,\, t+1]$ が t_0の位置から左方向に移動しても同様である．このとき，

$$-u(t_0) = u(t_0+1) \iff -{t_0}^2+1 = (t_0+1)^2-1 \iff 2{t_0}^2+2t_0-1=0 \iff t_0 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \cdots\cdots(1.8)$$

従って，(A), (B), (C) により，$f(t)$ を最小化するのは $t=t_0$のときである．

Fig.1

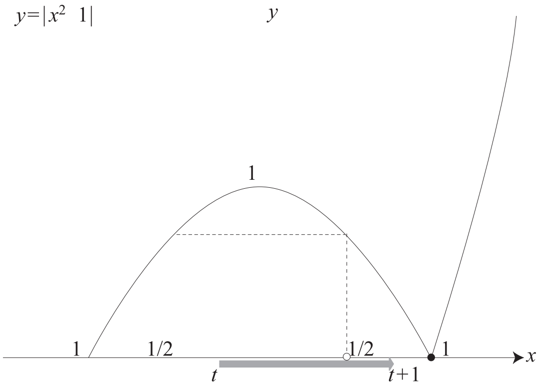
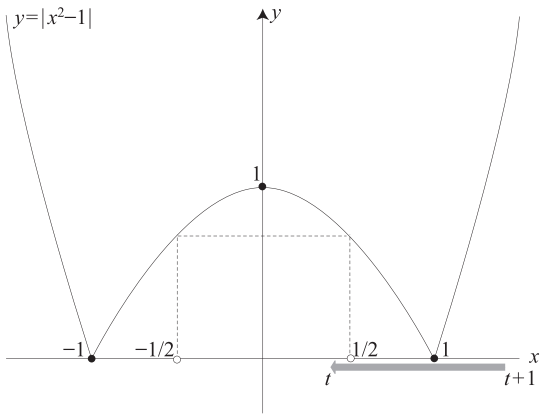


Fig.2



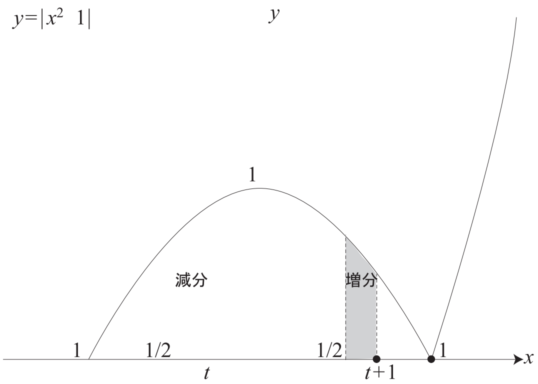


Fig.3

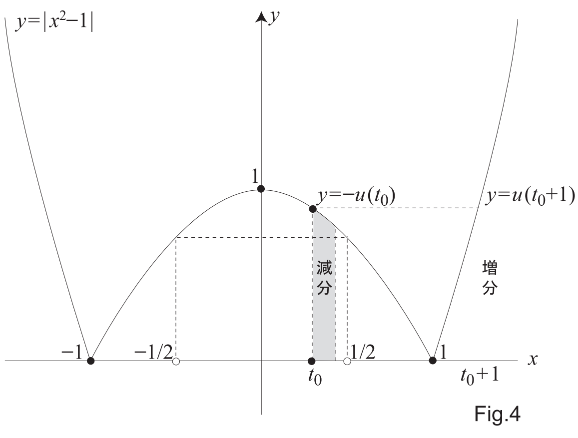


Fig.4

因みに，整式 $f(t)$ の $f'(t)$ による割り算

$$f(t) = \frac{2}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{6}\right)(2t^2+2t-1) - t + \frac{5}{6} \quad \cdots\cdots(1.9)$$

により，

$$f(t_0) = \left(\frac{1}{3}t_0 + \frac{1}{6}\right)(2{t_0}^2+2t_0-1) - t_0 + \frac{5}{6} = -t_0 + \frac{5}{6} = \frac{8-3\sqrt{3}}{6} \quad \cdots\cdots(1.10)$$

【3.2】

2 次関数 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次のように定義する．

$$\begin{cases} u_1(x) = x^2, \quad u_2(x) = x^2 + x & \cdots\cdots(2.1) \\ u_{n+2}(x) = x^2 + x\displaystyle\int_0^1 u_{n+1}(t)\,\mathbf{d}t + \int_0^1 \left(3u_n(t) - t^2\right)\mathbf{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) & \cdots\cdots(2.2) \end{cases}$$

このとき，$u_n(x)$ $(n = 3, 4, 5, \cdots)$ を求めよ．

【解答】

(2.2) において，

$$\int_0^1 u_n(t)\,\mathbf{d}t \overset{\text{def}}{=} a_n \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.2), (2.3) により，

$$u_{n+2}(x) = x^2 + a_{n+1}x + 3a_n - \frac{1}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

$\{a_n\}$ の定義により，

$$a_{n+2} = \int_0^1 u_{n+2}(t)\,\mathbf{d}t = \int_0^1 \left(t^2 + a_{n+1}t + 3a_n - \frac{1}{3}\right)\mathbf{d}t = \frac{1}{2}a_{n+1} + 3a_n$$

$$\iff 2a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) の特性方程式の解

$$2\tau^2 - \tau - 6 = 0 \iff \tau = 2,\ -\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

により，

$$a_n = C_1 2^n + C_2\left(-\frac{3}{2}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

と表されるので，

$$a_1 = \int_0^1 u_1(t)\,\mathbf{d}t = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \int_0^1 u_2(t)\,\mathbf{d}t = \frac{5}{6} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

より，

$$2C_1 - \frac{3}{2}C_2 = \frac{1}{3} \ \wedge\ 4C_1 + \frac{9}{4}C_2 = \frac{5}{6} \iff C_1 = \frac{4}{21},\ C_2 = \frac{2}{63} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

従って，(2.7), (2.9) により，

$$a_n = \frac{1}{21}\cdot 2^{n+2} + \frac{2}{63}\left(-\frac{3}{2}\right)^n = \frac{1}{21}\left\{2^{n+2} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

(2.2) が $n \geq 1$ で定義されていることに注意して，

$$u_n(x) = x^2 + \frac{1}{21}\left\{2^{n+1} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right\}x + \frac{1}{7}\left\{2^n - \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-3}\right\} - \frac{1}{3} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

【3.3】

$f(x)$ を整式とするとき，

$$f'(x)f(x)+\int_1^x f(t)\ \mathbf{d}t=\frac{4}{9}(x-1) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を満たす $f(x)$ をすべて求めよ．

【解答】

$f(x)$ の次数を $n \geq 0$ と置くとき，

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots \quad (a\neq 0) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

と表せるので，(3.2) を (3.1) に代入して，

$$\left(nax^{n-1}+(n-1)bx^{n-2}+\cdots\right)\left(ax^n+bx^{n-1}+\cdots\right)+\frac{a}{n+1}x^{n+1}+\frac{b}{n}x^n+\cdots=\frac{4}{9}(x-1) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) の左辺の次数は $\max(2n-1,\ n+1)$ であるから，次の 3 通りが考えられる．

(A) $2n-1>n+1$ の場合; 即ち，$n>2$ の場合.
(3.3) の左辺は $2n-1$ 次であり，右辺の次数と比較して，$n=1$.
これは $n>2$ に矛盾するので (3.1) を満たすものではない.

(B) $2n-1<n+1$ の場合; 即ち，$0\leq n<2$ の場合.
(3.3) の両辺の次数を比較して，$n=0$.
これは $f(x)$ が定数であることを意味するので，$f(x)=a$ を (3.1) に代入して，

$$0\cdot a+a(x-1)=\frac{4}{9}(x-1) \quad (\forall x) \iff a=\frac{4}{9} \qquad \therefore\ f(x)=\frac{4}{9} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(C) $2n-1=n+1$ の場合; 即ち，$n=2$ の場合.
(3.3) の左辺の最高次項に注目して，

$$2a^2x^3+\frac{a}{3}x^3=\frac{a}{3}(6a+1)x^3 \ \ (a\neq 0) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

これは $a=-\frac{1}{6}$ のときに 0 となるので，$f(x)=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$ を (3.1) に代入すると，

$$\left(-\frac{1}{3}x+b\right)\left(-\frac{1}{6}x^2+bx+c\right)+\left(-\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right)-\left(-\frac{1}{18}+\frac{1}{2}b+c\right)=\frac{4}{9}(x-1) \quad (\forall x)$$

$$\iff \left(b^2+\frac{2}{3}c\right)x+\left(bc+\frac{1}{18}-\frac{1}{2}b-c\right)=\frac{4}{9}(x-1) \quad (\forall x)$$

$$\iff \begin{cases} b^2+\dfrac{2}{3}c=\dfrac{4}{9} & \cdots\cdots(3.6) \\ bc-\dfrac{1}{2}b-c+\dfrac{1}{18}=-\dfrac{4}{9} & \cdots\cdots(3.7) \end{cases}$$

(3.7) より，

$$bc-\frac{1}{2}b-c+\frac{1}{2}=0 \iff (b-1)\left(c-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \therefore\ b=1 \lor c=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

● $b=1$ のとき，(3.6) より，

$$c=-\frac{5}{9}\times\frac{3}{2}=-\frac{5}{6} \iff c=-\frac{5}{6} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

● $c=\frac{1}{2}$ のとき，(3.6) より，

$$b^2=\frac{1}{9} \iff b=\pm\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

(3.9), (3.10) により，

$$f(x)=-\frac{1}{6}x^2+x-\frac{5}{6} \ \lor\ f(x)=-\frac{1}{6}x^2\pm\frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

(3.4), (3.11) により，

$$f(x)=\frac{4}{9},\quad f(x)=-\frac{1}{6}x^2+x-\frac{5}{6},\quad f(x)=-\frac{1}{6}x^2\pm\frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

【3.4】

$-\infty < x < \infty$ で定義された x の関数

$$f(x) = \int_0^1 \left| t^3 - 3t - x \right| \mathbf{d}t$$

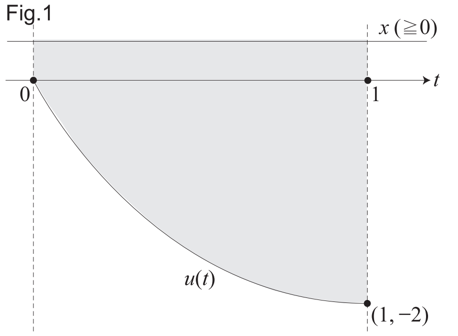
の最小値を与える x の値を求めよ.

【解答】

関数 $u(t) = t^3 - 3t$ は $0 \leq t \leq 1$ において単調減少である.
そこで, x のとり得る値の範囲を次の 3 通りに分類して考える.

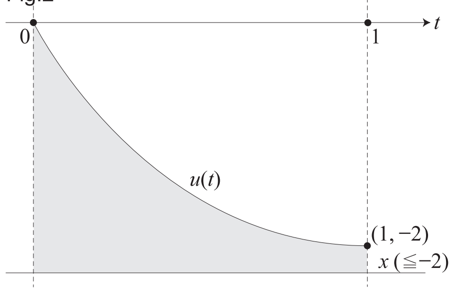
(A) $x \geq 0$ の場合 (Fig.1);
積分 $f(x)$ は, 曲線 $u(t)$ と定直線 $x (\geq 0)$ の囲む領域 $(0 \leq t \leq 1)$ の面積 (**網目部分**) を表すので, $x \geq 0$ において, x の増加とともに面積 $f(x)$ も増加する. 従って, $f(x)$ は増加関数である.

Fig.1



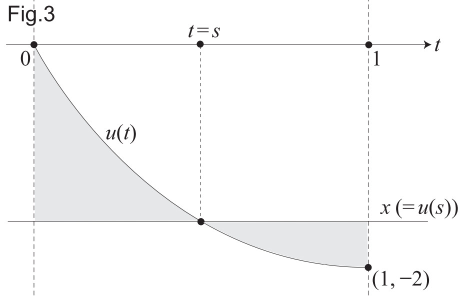
(B) $x \leq -2$ の場合 (Fig.2);
(A) の場合同様に, $x \leq -2$ において, x の減少とともに面積 $f(x)$ は増加する. 従って, $f(x)$ は減少関数である.

Fig.2



(C) $-2 \leq x \leq 0$ の場合 (Fig.3); $x = s^3 - 3s$ と置く.
曲線 $u(t)$ と定直線 $x (= u(s))$ の交点は $t = s$ であり,
$f(x)$ を $g(s)$ と書き換えて,

Fig.3



$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^s \big(u(t) - u(s)\big)\,\mathbf{d}t - \int_s^1 \big(u(t) - u(s)\big)\,\mathbf{d}t \\ &= \Big[U(t) - u(s)t\Big]_0^s - \Big[U(t) - u(s)t\Big]_s^1 \\ &= 2\big(U(s) - su(s)\big) - \big(U(0) + U(1) - u(s)\big) \end{aligned}$$

ここで, U は u の原始関数である.

$$\therefore\ \ g'(s) = 2u(s) - 2(u(s) + su'(s)) + u'(s) = -u'(s)(2s - 1)$$

ここで, $0 \leq s \leq 1$ において $u(s)$ は単調減少, 即ち, $u' < 0$ であり,
導関数 $g'(s)$ の符号は $s = 1/2$ の前後で負から正に変化する.
従って, $g(s)$ は $s = 1/2$ で極小かつ最小. このとき,

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{11}{8}$$

であるから, $f(x)$ は $x = -\dfrac{11}{8}$ において最小値をとる.

[Note]　関数 $x = s^3 - 3s$ は $0 \leq s \leq 1$ において単調であり,
$0 \leq s \leq 1$ に対応する x の範囲は $-2 \leq x \leq 0$ であることに注意.
即ち, (C) の場合において, s と x は $1:1$ に対応している.