【4.1】

数列 $\{a_n\}$ を次式によって定義する．

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

すべての正整数 n に対して，不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

が成り立つことを示せ．

【解答】

$n = 1, 2, 3$ に対して，(1.2) の左辺を計算すると，

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$$

この実験により，

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{a_1 \times \cdots \times a_n - 1}{a_1 \times \cdots \times a_n} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

の成立が予想できるので，これを帰納法で示す．

ある番号 n に対して，(1.3) の成立を仮定するとき，

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{a_1 \times \cdots \times a_n - 1}{a_1 \times \cdots \times a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= \frac{a_1 \times \cdots \times a_n \times a_{n+1} - a_{n+1} + a_1 \times \cdots \times a_n}{a_1 \times \cdots \times a_n \times a_{n+1}} = \frac{a_1 \times \cdots \times a_n \times a_{n+1} - 1}{a_1 \times \cdots a_n \times a_{n+1}} \quad (\because\ (1.1)) \end{aligned}$$

即ち，

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_1 \times \cdots \times a_{n+1} - 1}{a_1 \times \cdots \times a_{n+1}} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

また，$n = 1$ のときは上の実験で (1.3) の成立が確認されている．

従って，帰納的にすべての番号 n に対して (1.3) は成立する．

$$\therefore \quad \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{a_1 \times \cdots \times a_n - 1}{a_1 \times \cdots \times a_n} < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

即ち，不等式 (1.2) の成立が示された．

[Note]　証明において，$a_n \geq 2\ (\forall n)$ は (1.1) による $\{a_n\}$ の定義から明らかである．

即ち，等式 (1.5) 右辺の分子，分母はいずれも正であることが保証されている．

【4.2】

正整数 n に対して，$\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ という形の無理数を考える．
これらの無理数は何れもそれぞれ適当な正整数 m によって，$\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$ の形に表されることを示せ．

【解答】 – 帰納法 –

関係式

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = a_n - \sqrt{3}\,b_n \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

によって整数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定めるとき，

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} = \left(a_n-\sqrt{3}\,b_n\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = (2a_n+3b_n)-(a_n+2b_n)\sqrt{3}$$

より，

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

なる連立漸化式が導かれる．
一方，(2.1) は

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = a_n - \sqrt{3}\,b_n = \sqrt{{a_n}^2} - \sqrt{3{b_n}^2} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

と表せるので，

$${a_n}^2 - 3{b_n}^2 = 1 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

の成立を示せばよいことになる．
連立漸化式 (2.2) により，

$${a_{n+1}}^2 - 3{b_{n+1}}^2 = (2a_n+3b_n)^2 - 3(a_n+2b_n)^2 = {a_n}^2 - 3{b_n}^2 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

即ち，

$${a_n}^2 - 3{b_n}^2 = {a_{n-1}}^2 - 3{b_{n-1}}^2 = \cdots\cdots = {a_1}^2 - 3{b_1}^2 \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

また，(2.1) において $n=1$ として，

$$a_1 - \sqrt{3}\,b_1 = 2-\sqrt{3} \iff a_1 = 2 \;\land\; b_1 = 1 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

従って，(2.6), (2.7) により，

$${a_n}^2 - 3{b_n}^2 = \cdots\cdots = {a_1}^2 - 3{b_1}^2 = 4-3 = 1 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

以上により，題意は示された．

[Note] $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が**整数列**となる根拠は (2.2) にある．
即ち，ある番号 n に対して，a_n, b_n を**整数**と仮定するとき，

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n : \textbf{整数} \;\land\; b_{n+1} = a_n + 2b_n : \textbf{整数}$$

更に，$a_1 = 2$, $b_1 = 1$ であるから帰納的にすべて**整数**となる．

【別解】 – 共役数 –

関係式

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = a_n - \sqrt{3}\,b_n \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

によって整数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定めるとき，両辺の**共役数**を考えて，

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + \sqrt{3}\,b_n \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.1), (2.8) の辺々を掛け合わせて，

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \left(a_n-\sqrt{3}\,b_n\right)\left(a_n+\sqrt{3}\,b_n\right) \iff {a_n}^2-3{b_n}^2=1 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.1), (2.9) により，

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = \sqrt{{a_n}^2}-\sqrt{3{b_n}^2} = \sqrt{{a_n}^2}-\sqrt{{a_n}^2-1} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

(2.10) より，

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = \sqrt{m+1}-\sqrt{m} \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

を満たす正整数 $m={a_n}^2-1$ が存在する．

[Note] (2.8) において，共役数の性質 $\left(\overline{\alpha}\right)^n=\overline{\alpha^n}$ を既知として用いた．
入試でこの性質を用いる場合は，証明を与えて用いた方が安全である．

[Note] $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は**ペル方程式**

$$x^2-3y^2=1 \quad (x,\ y : \text{正整数})$$

の一般解 (必要十分な解) を無限に生成する整数列である．

【4.3】

O を中心とする円周上に異なる 3 点 A_0, B_0, C_0 が右回りに配置されている．
整数 $n \geq 0$ に対して，点列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ を次の規則によって定義する．

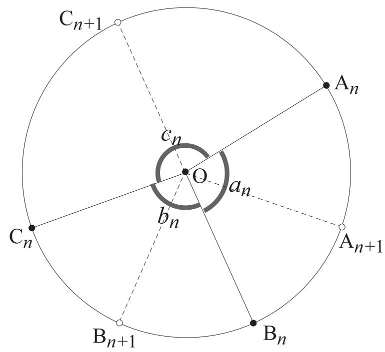
- A_{n+1} は弧 A_nB_n を 2 等分する点である．ただし，弧 A_nB_n は C_n を含まない
- B_{n+1} は弧 B_nC_n を 2 等分する点である．ただし，弧 B_nC_n は A_n を含まない
- C_{n+1} は弧 C_nA_n を 2 等分する点である．ただし，弧 C_nA_n は B_n を含まない

$\angle A_nOB_n = a_n$ とするとき，次の問いに答えよ．
(1) すべての整数 $n \geq 0$ に対して，

$$4a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2\pi \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であることを示せ．
(2) a_{3n} を a_0 を用いて表せ．

【解答】



(1) $\angle B_nOC_n = b_n$，$\angle C_nOA_n = c_n$ と置くと，$n \geq 0$ に対して，

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 2\pi & \cdots\cdots(3.1) \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) & \cdots\cdots(3.2) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n + c_n) & \cdots\cdots(3.3) \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(c_n + a_n) & \cdots\cdots(3.4) \end{cases}$$

(3.1), (3.3) により，

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(2\pi - a_n) = \pi - \frac{1}{2}a_n \iff b_n = \pi - \frac{1}{2}a_{n-1} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) を (3.2) に代入して，

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \pi - \frac{1}{2}a_{n-1}\right) \iff 4a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2\pi \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(2) (3.6) を同値変形して，

$$4\left(a_{n+2} - \frac{2\pi}{3}\right) - 2\left(a_{n+1} - \frac{2\pi}{3}\right) + \left(a_n - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

ここで，$a_n - \dfrac{2\pi}{3} = x_n$ と置けば，

$$4x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

(3.8) を同値変形して，

$$x_{n+3} = \frac{2x_{n+2} - x_{n+1}}{4} = \frac{1}{2}x_{n+2} - \frac{1}{4}x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{4}x_n\right) - \frac{1}{4}x_{n+1} = -\frac{1}{8}x_n \qquad \therefore\ x_{n+3} = -\frac{1}{8}x_n \quad \cdots\cdots(3.9)$$

(3.9) より，

$$x_{3n} = \left(-\frac{1}{8}\right)^n x_0 \iff a_{3n} = \left(-\frac{1}{8}\right)^n\left(a_0 - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

【4.4】

与えられた正整数 k に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \left[\frac{a_n + k}{3}\right] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定義する．ただし，$[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表す．

(1) $k = 8$, $k = 9$ に対して，一般項 a_n を求めよ．

(2) すべての正整数 n に対して，

$$a_n \leq \frac{k-1}{2} \ \land \ a_n \leq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(3) ある番号 n に対して，$a_n = a_{n+1}$ が成り立つとき，
n 以上のすべての整数 m に対して，$a_n = a_m$ であることを示し，その a_n を求めよ．

【解答】

(1) 題意の漸化式を用いて，

$$\begin{cases} k = 8 & \cdots\cdots \quad a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_n = 3\ (n \geq 3) \\ k = 9 & \cdots\cdots \quad a_1 = 0,\ a_2 = 3,\ a_n = 4\ (n \geq 3) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

(2) ある番号 n に対して，

$$a_n \leq \frac{k-1}{2} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

を仮定するとき，

$$a_{n+1} = \left[\frac{a_n + k}{3}\right] \leq \left[\frac{1}{3}\left(\frac{k-1}{2} + k\right)\right] = \left[\frac{1}{2}k - \frac{1}{6}\right] \iff a_{n+1} \leq \left[\frac{1}{2}k - \frac{1}{6}\right] \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.3) において，k : even の場合，

$$\left[\frac{1}{2}k - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{2}k - 1 = \frac{k-2}{2} < \frac{k-1}{2} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

k : odd の場合，

$$\left[\frac{1}{2}k - \frac{1}{6}\right] = \left[\frac{k-1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{k-1}{2} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

(4.3), (4.4), (4.5) により，k の偶奇に依らず，

$$a_{n+1} \leq \frac{k-1}{2} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

また，$n = 1$ のとき，

$$a_1 = 0 \leq \frac{k-1}{2} \quad (\because\ k : \text{正整数}) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

が成り立つのは明らかである．

従って，帰納法は完結する．

次に，ある番号 n に対して，

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

を仮定するとき，

$$\frac{a_n+k}{3} \leq \frac{a_{n+1}+k}{3} \implies \left[\frac{a_n+k}{3}\right] \leq \left[\frac{a_{n+1}+k}{3}\right] \qquad \therefore\ a_{n+1} \leq a_{n+2} \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

また，$n=1$ のとき，

$$a_1 = 0 \ \land\ a_2 = \left[\frac{0+k}{3}\right]\ (k:\text{正整数}) \qquad \therefore\ a_1 \leq a_2 \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

従って，帰納法は完結する．

(3) ある番号 n に対して，$a_n = a_{n+1}$ が成り立つとき，

$$\left[\frac{a_n+k}{3}\right] = \left[\frac{a_{n+1}+k}{3}\right] \iff a_{n+1} = a_{n+2} \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

(4.11) により，

$$\left[\frac{a_{n+1}+k}{3}\right] = \left[\frac{a_{n+2}+k}{3}\right] \iff a_{n+2} = a_{n+3} \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

以下，この操作を繰り返して，

$$a_n = a_m \quad (m \geq n) \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

このとき，

$$a_n = a_{n+1} = \left[\frac{a_n+k}{3}\right] \qquad \therefore\ a_n = \left[\frac{a_n+k}{3}\right] \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

このとき，Gauss **記号**の定義から，

$$a_n \leq \frac{a_n+k}{3} < a_n+1\ (\because\ a_n:\text{正整数}) \iff \frac{k-3}{2} < a_n \leq \frac{1}{2}k \qquad \cdots\cdots(4.15)$$

ここで，(4.2) を考慮して，

$$\frac{k-3}{2} < a_n \leq \frac{k-1}{2} \iff \frac{k-1}{2} - 1 < a_n \leq \frac{k-1}{2} \iff a_n \leq \frac{k-1}{2} < a_n + 1 \qquad \cdots\cdots(4.16)$$

このとき，Gauss **記号**の定義から，

$$a_n = \left[\frac{k-1}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2} & (k:\mathrm{odd}) \\ \dfrac{k-2}{2} & (k:\mathrm{even}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.17)$$

[Note]　実数 x と整数 m に対して，$[x] = m$ のとき，

$$m \leq x < m+1 \iff [x] \leq x < [x]+1$$

が成り立つので，(4.15), (4.16) ではこれを用いた．