【5.1】

正整数 n に対して，数列 $\{u_n\}$ を次のように定義する．

$$u_1=2,\ u_2=a^2+2,\quad u_{n+2}=au_n-u_{n+1}\ \ (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.0)$$

このとき，$\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないための整数 a に関する必要十分条件を求めよ．

【解答】

題意より，$a\equiv 0,1,2,3 \pmod 4$ の 4 通りの値で議論すれば十分である．
この 4 通りの a に対して，$\{u_n\}$ の各項を module4 で計算した値を表にする．
ここで，(1.0) を合同式

$$u_{n+2}\equiv au_n-u_{n+1}\pmod 4\quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

で考え，$\{u_n\}$ の各項の剰余類を計算する．

a	0	1	2	$3\equiv -1$
	$u_{n+2}\equiv -u_{n+1}$	$u_{n+2}\equiv u_n-u_{n+1}$	$u_{n+2}\equiv 2u_n-u_{n+1}$	$u_{n+2}\equiv -u_n-u_{n+1}$
u_1	2	2	2	2
u_2	2	3	$6\equiv 2$	$11\equiv 3$
u_3	$-2\equiv 2$	$-1\equiv 3$	2	$-5\equiv 3$
u_4	$-2\equiv 2$	0	2	$-6\equiv 2$
u_5	$-2\equiv 2$	3	2	$-5\equiv 3$
u_6	$-2\equiv 2$	$-3\equiv 1$	2	$-5\equiv 3$
u_7	$-2\equiv 2$	2	2	$-6\equiv 2$
u_8	$-2\equiv 2$	$-1\equiv 3$	2	$-5\equiv 3$

(A) $a\equiv 1 \pmod 4$ の場合; 表より，

$$u_4\equiv 0\pmod 4$$

となり，題意を満たさない．
また，$a\equiv 0,2,3 \pmod 4$ の場合，
$\{u_n\}$ の各項を module4 で計算した数列は 0 を含まない**周期列**になると予想できる．
実際，
(B) $a\equiv 0 \pmod 4$ の場合; (1.1) より，

$$u_{n+2}\equiv -u_{n+1}\equiv u_n\pmod 4 \iff u_{n+2}\equiv u_n\pmod 4 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

が成り立つので，$u_1\equiv u_2\equiv 2 \pmod 4$ より，
u_3 以降のすべての項は module4 で 2 となる．

$$\therefore\ u_n\equiv 2\pmod 4\quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(C) $a \equiv 2 \pmod 4$ の場合; (1.1) より,

$$u_{n+2} \equiv 2u_n - u_{n+1} \pmod 4 \iff u_{n+2} - u_{n+1} \equiv -2\bigl(u_{n+1} - u_n\bigr) \pmod 4$$

即ち,

$$u_{n+1} - u_{\equiv}(-2)^{n-1}\bigl(u_2 - u_1\bigr) \pmod 4 \iff u_{n+1} \equiv u_n \pmod 4 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

が成り立つので, $u_1 \equiv u_2 \equiv 2 \pmod 4$ より,

$$u_n \equiv 2 \pmod 4 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(D) $a \equiv 3 \equiv -1 \pmod 4$ の場合; (1.1) を繰り返し用いて,

$$u_{n+3} - u_n \equiv -u_{n+1} - u_{n+2} - u_n \pmod 4 \equiv -u_{n+1} - \bigl(-u_n - u_{n+1}\bigr) - u_n \equiv 0 \pmod 4$$

即ち,

$$u_{n+3} \equiv u_n \pmod 4 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

が成り立つので, $u_1 = 2,\ u_2 \equiv u_3 \equiv 3 \pmod 4$ より,
$\{u_n\}$ の各項を module 4 で計算した数列は, 2, 3, 3 を周期 3 で繰り返す.
以上により, $a \equiv 0, 2, 3 \pmod 4$ の場合には $\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないことが示された.

$$\therefore\ a \not\equiv 1 \pmod 4 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

【5.2】

正整数 n に対して，$\sqrt{n}$ に最も近い整数を a_n とする．

(1) m を正整数とするとき，$a_n=m$ となる正整数 n の個数を m の式で表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2006} a_k$ を求めよ．

【解答】

(1) $\sqrt{n}$ に最も近い正整数が m であることから，

$$m-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<m+\frac{1}{2} \iff m^2-m+\frac{1}{4}<n<m^2+m+\frac{1}{4}$$
$$\iff n=m^2-m+1,\ m^2-m+2,\ \cdots,\ m^2+m\ (=m^2-m+2m) \quad \cdots\cdots(2.1)$$

従って，$a_n=m$ となる n の個数は，$2m$ 個である．

(2) (1) の結果から，$\{a_n\}$ の各項は，

$$1,\ 1\ \big|\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\ \big|\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3\ \big|\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \big|\ 5,\ 5,\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots(2.2)$$

とグループ化でき，各グループを左から順に第 1 群，第 2 群などと番号付ければ，

$a_{2006}=m$ を満たす m について，

$$m(m-1)<2006<m(m+1) \iff m=45 \quad \left(\because\ 44\cdot45=1980,\ 45\cdot46=2070\right) \quad \cdots\cdots(2.3)$$

より，a_{2006} は第 45 群内の項である．

更に，

$$2006-44\times45=26 \quad \cdots\cdots(2.4)$$

より，a_{2006} は第 45 群の 26 項目である．

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{2006} a_k=\sum_{m=1}^{44} m\cdot2m+45\times26=2\times\frac{44\cdot45(2\cdot44+1)}{6}+1170=59910 \quad \cdots\cdots(2.5)$$

【5.3】

正整数 n に対して，連立不等式

$$\begin{cases} x+y+z\leq n & \cdots\cdots(3.1)\\ -x+y-z\leq n & \cdots\cdots(3.2)\\ x-y-z\leq n & \cdots\cdots(3.3)\\ -x-y+z\leq n & \cdots\cdots(3.4)\end{cases}$$

を満たす xyz 空間内の格子点の個数を $u(n)$ で表すとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u(n)}{n^3} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

の値を求めよ.

【解答】

(3.1), (3.2), (3.3), (3.4) の表す空間領域の平面 $z=k$ による切口は，各不等式ににおいて，$z=k\,(k:$ 整数$)$ として，

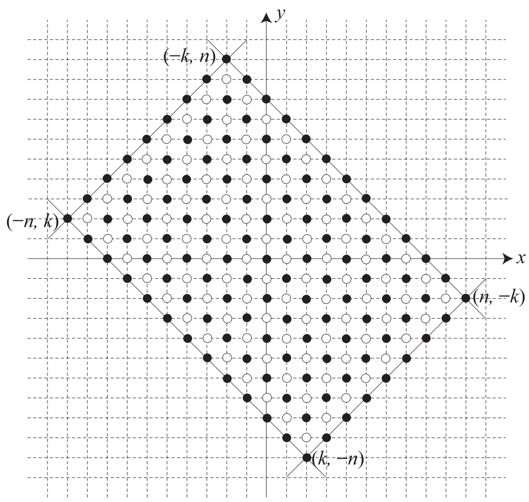
$$-n+k\leq x+y\leq n-k \wedge -n-k\leq y-x\leq n+k \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

であり，この平面領域が存在するための整数 k の条件は，

$(3.1)+(3.4)$ として，$z\leq n$ が導かれ，

$(3.2)+(3.3)$ として，$-z\leq n$ が導かれるので，

$$-n\leq z\leq n \qquad \therefore\ -n\leq k\leq n \qquad \cdots\cdots(3.7)$$



このとき，平面 $z=k$ による切口は長方形の周および内部であり，この平面領域内にある格子点を右図の様に白丸と黒丸に分類して数えると，

$$(n+k+1)(n-k+1)+(n+k)(n-k)=(n+1)^2-k^2+n^2-k^2=2n^2+2n+1-2k^2\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

従って，(3.7), (3.8) により，

$$\begin{aligned} u(n)&=\sum_{k=-n}^{n}\left(2n^2+2n+1-2k^2\right)\\ &=(2n^2+2n+1)(2n+1)-2\times\sum_{k=-n}^{n}k^2=(2n^2+2n+1)(2n+1)-4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &=\frac{1}{3}(2n+1)(4n^2+4n+3) \qquad \cdots\cdots(3.9)\end{aligned}$$

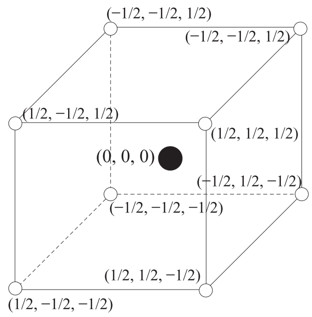
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{u(n)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\frac{8}{3} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

[Note]　連立不等式 (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) の表す空間領域は,

$$(n,\ n,\ -n),\ \ (-n,\ -n,\ -n),\ \ (-n,\ n,\ n),\ \ (n,\ -n,\ n)$$

を 4 頂点とする正四面体の表面および内部である．即ち，これらの点は各不等式の表す境界の平面の方程式を 3 個ずつ連立して得られる 4 頂点である．($n=2$ の正四面体と領域内の格子点の分布状況を**下図**に示した)

この領域内の格子点分布の平均密度 (単位体積当りの格子点数) は，正四面体の体積を $V(n)$ で表せば，$\dfrac{u(n)}{V(n)}$ で与えられる．この関数に対して $n\to\infty$ なる極限操作を施せば，その収束極限は 1 である．何故なら，$n\to\infty$ の下に正四面体は四方に拡大し，極限的に全空間を覆うと考えられるからである．空間全体で見た場合，各格子点が単位体積当り 1 個の割合で分布しているのは直観的に理解できるであろう．



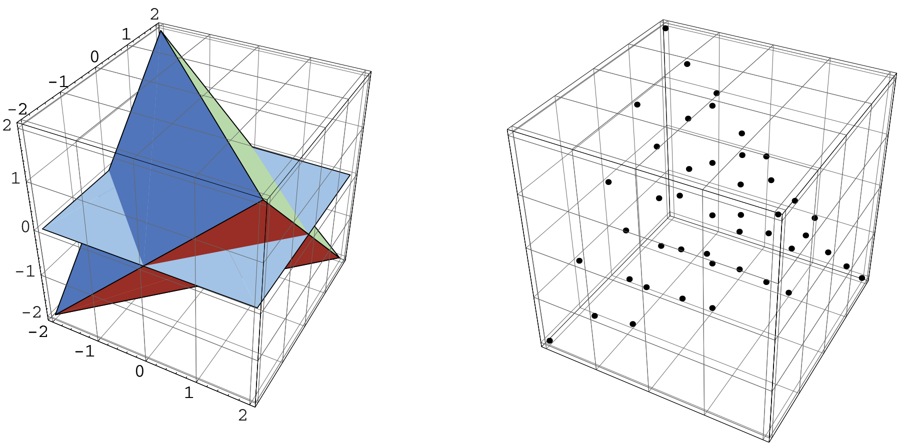
一方，正四面体の体積 $V(n)$ は，

$$V(n)=(2n)^3\left(1-4\times\frac{1}{6}\right)=\frac{8n^3}{3}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u(n)}{V(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{u(n)}{\dfrac{8n^3}{3}}=1\iff\lim_{n\to\infty}\frac{u(n)}{n^3}=\frac{8}{3}$$

この計算によれば，格子点の個数 $u(n)$ の式を具体化せずに極限値が算出可能である．



【5.4】

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ に対して,

$$s_n=\alpha^n+\beta^n$$

によって数列 $\{s_n\}$ を定義する.

(1) $s_{n+2},\ s_{n+1},\ s_n$ の関係式を求めよ. ただし, $n=1,2,3,\cdots$ とする.

(2) $\left[\alpha^{2003}\right]$ の一位の数字を求めよ. ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す.

【解答】

(1) $\alpha,\ \beta$ は方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 解であるから,

$$s_{=}\alpha^n+\beta^n \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

を一般項に持つ数列 $\{s_n\}$ の満たす漸化式は,

$$s_{n+2}-4s_{n+1}+s_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

である. 実際,

$$\begin{aligned} s_{n+2}-4s_{n+1}+s_n &= \left(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\right)-4\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)+\left(\alpha^n+\beta^n\right) \\ &= \alpha^n\left(\alpha^2-4\alpha+1\right)+\beta^n\left(\beta^2-4\beta+1\right)=\alpha^n\times 0+\beta^n\times 0=0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{aligned}$$

(2) $\alpha=2+\sqrt{3},\ \beta=2-\sqrt{3}$ は**互いに共役**であり,

$$\alpha^n+\beta^n:\text{整数} \ \wedge\ 0<\beta^n<1 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

であるから,

$$\left[\alpha^{2003}\right]=\left[s_{2003}-\beta^{2003}\right]=s_{2003}-1 \quad \left(\because\ s_n:\text{整数}\right) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

そこで, 整数列 $\{s_n\}$ の各項を module 10 で計算すると,

$$\begin{cases} s_1=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4\equiv 4 \\ s_2=(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2=14\equiv 4 \\ s_3=4s_2-s_1\equiv 4\cdot 4-4\equiv 2 \\ s_4=4s_3-s_2\equiv 4\cdot 2-4\equiv 4 \\ s_5=4s_4-s_3\equiv 4\cdot 4-2\equiv 4 \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

即ち, $\{s_n\}$ の各項の module 10 による剰余は, 周期 3 で 4, 4, 2 を繰り返す**周期列**と予想できる.
実際,

$$s_{n+3}-s_n=4s_{n+2}-s_{n+1}-s_n=15s_{n+1}-5s_n\equiv 0 \pmod 5 \quad \therefore\ s_{n+3}\equiv s_n \pmod 5 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

更に,

$$s_{n+2}-s_{n+1}=3s_{n+1}-s_n\equiv s_{n+1}-s_n\equiv\cdots\equiv s_2-s_1\equiv 0 \pmod 2 \quad \therefore\ s_n\equiv s_1\equiv 0 \pmod 2 \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(4.5), (4.6) により,

$$s_{n+3}\equiv s_n \pmod{10} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(4.4), (4.7) により,

$$\left[\alpha^{2003}\right]=s_{2003}-1\equiv s_2-1\equiv 3 \pmod{10} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$