【6.1】

数列 $\{a_n\}$ が次の関係式で定義されている．

$$6\sum_{k=1}^{n} k a_k = (4n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1)$$

このとき，一般項 a_n を求めよ．

【解答】

漸化式 (1) の番号を 1 つ上げて，

$$6\sum_{k=1}^{n+1} k a_k = (4n+5)\sum_{k=1}^{n+1} a_k + 3 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2)$$

(2), (1) 両式の差をとって，

$$6(n+1)a_{n+1} = (4n+1)a_{n+1} + 4\sum_{k=1}^{n+1} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\iff \ 4\sum_{k=1}^{n+1} a_k = (2n+5)a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3)$$

漸化式 (3) の番号を 1 つ下げて，

$$4\sum_{k=1}^{n} a_k = (2n+3)a_n \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4)$$

(3), (4) 両式の差をとって，

$$4a_{n+1} = (2n+5)a_{n+1} - (2n+3)a_n \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

$$\iff \ (2n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_n \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

$$\iff \ \frac{a_{n+1}}{2n+3} = \frac{a_n}{2n+1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots(5)$$

(5) を繰り返し用いて，

$$\frac{a_n}{2n+1} = \frac{a_{n-1}}{2n-1} = \cdots = \frac{a_3}{7} = \frac{a_2}{5} \qquad \cdots\cdots(6)$$

ここで，(1) に $n = 1$ を代入して，

$$6a_1 = 5a_1 + 3 \iff a_1 = 3 \qquad \cdots\cdots(7)$$

更に (1) に $n = 2$ を代入して，

$$6a_1 + 12a_2 = 9(a_1 + a_2) + 3 \iff a_2 = 4 \quad (\because\ a_1 = 3) \qquad \cdots\cdots(8)$$

(6), (7), (8) により，

$$a_1 = 3 \ \wedge \ a_n = \frac{4}{5}(2n+1) \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots(9)$$

【6.2】

n を正の整数とする．

n 個の球と n 個の箱があり，球にも箱にも $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ の通し番号が付けてある．

n 個の球を 1 個ずつ箱に入れるとき，箱の番号と球の番号が一致しない入れ方の総数を a_n で表す．

例えば，$a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=2,\ \cdots$ である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $a_{n+2},\ a_{n+1},\ a_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ の満たす関係式を求めよ．

(2) $\dfrac{a_n}{n!}=p_n \wedge p_{n+1}-p_n=q_n$ と置いて，一般項 q_n を求めよ．また，一般項 a_n を求めよ．

【解答】

(2) (1) の結果を既知とするとき，

$$a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}-(n+1)a_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

ここで，$a_n=n!\,p_n$ と置けば，

$$\begin{aligned}&(n+2)!\,p_{n+2}-(n+1)\cdot(n+1)!\,p_{n+1}-(n+1)\cdot n!\,p_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)\\ &\iff (n+2)p_{n+2}-(n+1)p_{n+1}-p_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.2)\end{aligned}$$

ここで，$p_{n+1}-p_n=q_n$ と置けば，

$$(n+2)q_{n+1}+q_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \iff q_{n+1}=-\frac{1}{n+2}q_n \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.3) を繰り返し用いて，

$$\begin{aligned}q_n&=-\frac{1}{n+1}a_{n-1}=-\frac{1}{n+1}\times\left(-\frac{1}{n}\right)q_{n-2}=\cdots\\ &=-\frac{1}{n+1}\times\left(-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(-\frac{1}{3}\right)q_1=\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\times n\times\cdots\times 3}q_1 \qquad \cdots\cdots(2.4)\end{aligned}$$

ここで，

$$q_1=p_2-p_1=\frac{a_2}{2!}-\frac{a_1}{1!}=\frac{1}{2} \quad \left(\because\ a_2=1 \wedge a_1=0\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) を (2.4) に代入して，

$$q_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\times n\times\cdots\times 3\times 2}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.6) により，

$$p_{n+1}-p_n=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n=1,2,3,\cdots) \iff p_n=p_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \quad (n=2,3,4,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.7) において，$k+1=j$ と書き換えれば，

$$p_n=\sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} \quad \left(\because\ \frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)}{1!}=0\right) \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.8) の両辺に $n!$ を乗じて，

$$a_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

【6.3】

Pascal 三角形の第 n 行の部分和

$$P_n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_{3k},\quad Q_n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_{3k+1},\quad R_n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_{3k+2}$$

として数列 $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{R_n\}$ を定義する．ただし，$k>n$ のとき，${}_n\mathrm{C}_k=0$ とする．

(1) P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1} のそれぞれを P_n, Q_n, R_n の式で表せ.

(2) 一般項 P_n, Q_n, R_n のそれぞれを n の式で表せ.

【解答】 – 周期性 –

漸化式 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}={}_n\mathrm{C}_{r+1}+{}_n\mathrm{C}_r$ を用いて，

$$P_{n+1}=\sum_{k=0}^{\infty} {}_{n+1}\mathrm{C}_{3k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left({}_n\mathrm{C}_{3k}+{}_n\mathrm{C}_{3k-1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty} {}_n\mathrm{C}_{3k}+\sum_{r=0}^{\infty} {}_n\mathrm{C}_{3r+2}=P_n+R_n\quad\left(\because\ k-1\overset{\text{put}}{=}r\right)$$

同様にして，

$$\begin{cases} P_{n+1}=P_n+R_n & \cdots\cdots(3.1)\\ Q_{n+1}=Q_n+P_n & \cdots\cdots(3.2)\\ R_{n+1}=R_n+Q_n & \cdots\cdots(3.3)\end{cases}$$

(3.1), (3.2), (3.3) により，

$$\begin{cases} P_{n+1}-Q_{n+1}=-(Q_n-R_n) & \cdots\cdots(3.4)\\ Q_{n+1}-R_{n+1}=-(R_n-P_n) & \cdots\cdots(3.5)\\ R_{n+1}-P_{n+1}=-(P_n-Q_n) & \cdots\cdots(3.6)\end{cases}$$

これらを繰り返し用いて，

$$\begin{cases} P_{n+3}-Q_{n+3}=-(P_n-Q_n)\\ Q_{n+3}-R_{n+3}=-(Q_n-R_n)\\ R_{n+3}-P_{n+3}=-(R_n-P_n)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} P_{n+6}-Q_{n+6}=P_n-Q_n & \cdots\cdots(3.7)\\ Q_{n+6}-R_{n+6}=Q_n-R_n & \cdots\cdots(3.8)\\ R_{n+6}-P_{n+6}=R_n-P_n & \cdots\cdots(3.9)\end{cases}$$

(3.7), (3.8), (3.9) により，各数列の差が**周期 6 で循環する**ことから，最初の 6 項を調べて下表を得る.

n	1	2	3	4	5	6
P_n	1	1	2	5	11	22
Q_n	1	2	3	5	10	21
R_n	0	1	3	6	11	21
P_n-Q_n	0	-1	-1	0	1	1
Q_n-R_n	1	1	0	-1	-1	0
R_n-P_n	-1	0	1	1	0	-1

上の表と 2 項定理 $P_n+Q_n+R_n=2^n$ により，番号 n を module6 で分類して結果を表せば，

n	1	2	3	4	5	0
P_n	$\dfrac{2^n+1}{3}$	$\dfrac{2^n-1}{3}$	$\dfrac{2^n-2}{3}$	$\dfrac{2^n-1}{3}$	$\dfrac{2^n+1}{3}$	$\dfrac{2^n+2}{3}$
Q_n	$\dfrac{2^n+1}{3}$	$\dfrac{2^n+2}{3}$	$\dfrac{2^n+1}{3}$	$\dfrac{2^n-1}{3}$	$\dfrac{2^n-2}{3}$	$\dfrac{2^n-1}{3}$
R_n	$\dfrac{2^n-2}{3}$	$\dfrac{2^n-1}{3}$	$\dfrac{2^n+1}{3}$	$\dfrac{2^n+2}{3}$	$\dfrac{2^n+1}{3}$	$\dfrac{2^n-1}{3}$

【別解】　– 4 項間漸化式 –

前頁の 2 項間漸化式 (3.1), (3.2), (3.3) を用いて,

$$\begin{cases} P_{n+1}-P_n=R_n & \cdots\cdots(3.10) \\ P_n-P_{n-1}=R_{n-1} & \cdots\cdots(3.11) \\ R_n-R_{n-1}=Q_{n-1} & \cdots\cdots(3.12) \end{cases}$$

(3.10), (3.11), (3.12) により,

$$P_{n+1}-2P_n+P_{n-1}=Q_{n-1} \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

(3.13) より,

$$P_{n+2}-2P_{n+1}+P_n=Q_n \qquad \cdots\cdots(3.14)$$

(3.13), (3.14), (3.2) により,

$$P_{n+2}-3P_{n+1}+3P_n-P_{n-1}=P_{n-1} \iff P_{n+3}-3P_{n+2}+3P_{n+1}-2P_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(3.15)$$

(3.15) の特性方程式を解いて,

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-2=0 \iff (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda+1)=0$$
$$\iff \lambda=2,\ -\omega,\ -\overline{\omega} \quad \left(\omega^3=1 \wedge \omega\neq 1\right) \qquad \cdots\cdots(3.16)$$

特性解 (3.16) により,

$$P_n=C_1\cdot 2^n+C_2(-\omega)^n+C_3(-\overline{\omega})^n \qquad \cdots\cdots(3.17)$$

と表せるので，初期条件

$$(P_0=)\ P_1=P_2=1,\ P_3=2 \qquad \cdots\cdots(3.18)$$

により,

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=1 & \cdots\cdots(3.19) \\ 2C_1-\omega C_2-\overline{\omega}C_3=1 & \cdots\cdots(3.20) \\ 4C_1+\overline{\omega}C_2+\omega C_3=1 & \cdots\cdots(3.21) \end{cases}$$

(3.19)∧(3.20)∧(3.21) を解き，(3.17) に代入して,

$$P_n=\frac{1}{3}\left(2^n+(-\omega)^n+(-\overline{\omega})^n\right) \qquad \cdots\cdots(3.22)$$

(3.22) を (3.1) に用いて,

$$R_n=\frac{1}{3}\left(2^n+(-\omega)^{n+2}+(-\overline{\omega})^{n+2}\right) \qquad \cdots\cdots(3.23)$$

(3.22), (3.23) を $P_n+Q_n+R_n=2^n$ に代入して,

$$Q_n=\frac{1}{3}\left(2^n-(-\omega)^{n+1}-(-\overline{\omega})^{n+1}\right) \qquad \cdots\cdots(3.24)$$

【別解】　– 母関数 –

ω, $\overline{\omega}$ を 1 の 3 乗根として，二項係数の母関数を用いる．

$$
\begin{aligned}
(1+\omega)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\,\omega^r &= \sum_{k=0}^{\infty}\left({}_n\mathrm{C}_{3k}\,\omega^{3k} + {}_n\mathrm{C}_{3k+1}\,\omega^{3k+1} + {}_n\mathrm{C}_{3k+2}\,\omega^{3k+2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} {}_n\mathrm{C}_{3k} + \omega \sum_{k=0}^{\infty} {}_n\mathrm{C}_{3k+1} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} {}_n\mathrm{C}_{3k+2} \quad \left(\because\ \omega^3 = 1\right) \\
&= P_n + \omega Q_n + \overline{\omega} R_n \quad \left(\because\ \omega^2 = \overline{\omega}\right)
\end{aligned}
$$

即ち，

$$
P_n + \omega Q_n + \overline{\omega} R_n = \left(-\overline{\omega}\right)^n \qquad \cdots\cdots(3.26)
$$

次に，ω, $\overline{\omega}$ を入れ替えて上の議論を繰り返せば，

$$
P_n + \overline{\omega} Q_n + \omega R_n = \left(-\omega\right)^n \qquad \cdots\cdots(3.27)
$$

更に，

$$
P_n + Q_n + R_n = 2^n \qquad \cdots\cdots(3.28)
$$

は自明であるから，(3.26), (3.27), (3.28) を連立して，

$$
\begin{cases}
P_n = \dfrac{1}{3}\left(2^n + (-\omega)^n + (-\overline{\omega})^n\right) & \cdots\cdots(3.29) \\
Q_n = \dfrac{1}{3}\left(2^n - (-\omega)^{n+1} - (-\overline{\omega})^{n+1}\right) & \cdots\cdots(3.30) \\
R_n = \dfrac{1}{3}\left(2^n - (-\omega)^{n-1} - (-\overline{\omega})^{n-1}\right) & \cdots\cdots(3.31)
\end{cases}
$$

[Note]　連立方程式 (3.26), (3.27), (3.28) の**掃き出し法**による解法.

連立方程式の表現行列は,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2^n \\ 1 & \omega & \overline{\omega} & (-\overline{\omega})^n \\ 1 & \overline{\omega} & \omega & (-\omega)^n \end{array}\right] \qquad \cdots\cdots(3.32)$$

low.2, low.3 から low.1 を引いて,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2^n \\ 0 & \omega-1 & \overline{\omega}-1 & (-\overline{\omega})^n-2^n \\ 0 & \overline{\omega}-1 & \omega-1 & (-\omega)^n-2^n \end{array}\right] \qquad \cdots\cdots(3.33)$$

low.2 を (2, 2) 成分で割り，low.3 を (3, 3) 成分で割って,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2^n \\ 0 & 1 & \omega+1 & \dfrac{(-\overline{\omega})^n-2^n}{\omega-1} \\ 0 & \omega+1 & 1 & \dfrac{(-\omega)^n-2^n}{\omega-1} \end{array}\right] \qquad \cdots\cdots(3.34)$$

low.1 から low.2 を引いて,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\omega & 2^n-\dfrac{(-\overline{\omega})^n-2^n}{\omega-1} \\ 0 & 1 & \omega+1 & \dfrac{(-\overline{\omega})^n-2^n}{\omega-1} \\ 0 & \omega+1 & 1 & \dfrac{(-\omega)^n-2^n}{\omega-1} \end{array}\right] \qquad \cdots\cdots(3.35)$$

low.2 から low.3 の $\omega+1$ 倍を引いて,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\omega & \dfrac{\omega\cdot 2^n-(-\overline{\omega})^n}{\omega-1} \\ 0 & 1-(\omega+1)^2 & 0 & \dfrac{(-\overline{\omega})^n-2^n}{\omega-1}-\dfrac{(-\omega)^n-2^n}{\omega-1}\times(\omega+1) \\ 0 & \omega+1 & 1 & \dfrac{(-\omega)^n-2^n}{\omega-1} \end{array}\right] \qquad \cdots\cdots(3.36)$$

low.2 を整理して,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\omega & \dfrac{\omega\cdot 2^n-(-\overline{\omega})^n}{\omega-1} \\ 0 & 1-\omega & 0 & \dfrac{\omega\cdot 2^n+\overline{\omega}(-\omega)^n+(-\overline{\omega})^n}{\omega-1} \\ 0 & \omega+1 & 1 & \dfrac{(-\omega)^n-2^n}{\omega-1} \end{array}\right] \qquad \cdots\cdots(3.37)$$

low.2 を (2, 2) 成分で割って,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\omega & \dfrac{\omega\cdot 2^n-(-\overline{\omega})^n}{\omega-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-\omega\cdot 2^n-\overline{\omega}(-\omega)^n-(-\overline{\omega})^n}{(\omega-1)^2} \\ 0 & \omega+1 & 1 & \dfrac{(-\omega)^n-2^n}{\omega-1} \end{array}\right] \quad \cdots\cdots(3.38)$$

low.3 から low.2 の $\omega+1$ 倍を引いて,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\omega & \dfrac{\omega\cdot 2^n-(-\overline{\omega})^n}{\omega-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{2^n+\omega(-\omega)^n+\overline{\omega}(-\overline{\omega})^n}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{(-\omega)^n-2^n}{\omega-1}-\dfrac{-\omega\cdot 2^n-\overline{\omega}(-\omega)^n-(-\overline{\omega})^n}{(\omega-1)^2}\times(\omega+1) \end{array}\right] \quad \cdots\cdots(3.39)$$

(3, 4) 成分を整理して,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\omega & \dfrac{\omega\cdot 2^n-(-\overline{\omega})^n}{\omega-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{2^n+\omega(-\omega)^n+\overline{\omega}(-\overline{\omega})^n}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2^n+\overline{\omega}(-\omega)^n+\omega(-\overline{\omega})^n}{3} \end{array}\right] \quad \cdots\cdots(3.40)$$

low/1 から low.3 の $-\omega$ 倍を引いて,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{\omega\cdot 2^n-(-\overline{\omega})^n}{\omega-1}-\dfrac{2^n+\overline{\omega}(-\omega)^n+\omega(-\overline{\omega})^n}{3}\times(-\omega) \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{2^n+\omega(-\omega)^n+\overline{\omega}(-\overline{\omega})^n}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2^n+\overline{\omega}(-\omega)^n+\omega(-\overline{\omega})^n}{3} \end{array}\right] \quad \cdots\cdots(3.41)$$

(1, 4) 成分を整理して,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{2^n+(-\omega)^n+(-\overline{\omega})^n}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{2^n+\omega(-\omega)^n+\overline{\omega}(-\overline{\omega})^n}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2^n+\overline{\omega}(-\omega)^n+\omega(-\overline{\omega})^n}{3} \end{array}\right] \quad \cdots\cdots(3.42)$$

【6.4】

n個の実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ が条件

$$a_{k+2}-2a_{k+1}+a_k>0 \quad (1\leq k\leq n-2) \qquad \cdots\cdots(1)$$

を満たしている．また，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の最小値を m とする．
このとき，$a_j=m$ となる番号 $j\ (1\leq j\leq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ．

【解答】

(1) より，

$$a_n-a_{n-1}>a_{n-1}-a_{n-2}>\cdots>a_2-a_1 \qquad \cdots\cdots(2)$$

が成り立つので，

$$a_{k+1}-a_k=b_k \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

と表せば，(2) より，

$$b_{n-1}>b_{n-2}>\cdots>b_1 \qquad \cdots\cdots(3)$$

が成り立つ．

• $b_1\geq 0$ の場合;

$$0\leq b_1<b_2<\cdots<b_{n-1} \iff a_1\leq a_2<a_3<\cdots<a_{n-1}<a_n \qquad \cdots\cdots(4)$$

より，

$$\begin{cases} a_1<a_2\text{のとき, 最小数は } a_1\text{の 1 個} \\ a_1=a_2\text{のとき, 最小数は } a_1,\ a_2\text{の 2 個} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(5)$$

• $b_{n-1}\leq 0$ の場合;

$$b_1<b_2<\cdots<b_{n-2}<b_{n-1}\leq 0 \iff a_1>a_2>\cdots>a_{n-1}\geq a_n \qquad \cdots\cdots(6)$$

より，

$$\begin{cases} a_{n-1}>a_n\text{のとき, 最小数は } a_n\text{の 1 個} \\ a_{n-1}=a_n\text{のとき, 最小数は } a_{n-1},\ a_n\text{の 2 個} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(7)$$

• $b_1<0<b_{n-1}$ の場合;

$$b_1<b_2<\cdots<b_j\leq 0<b_{j+1}<\cdots<b_{n-1} \qquad \cdots\cdots(8)$$

を満たす番号 $j\ (2\leq j\leq n-2)$ が唯一存在する．
このとき，

$$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_j\geq a_{j+1} \ \wedge\ a_{j+1}<a_{j+2}<\cdots<a_{n-1}<a_n \qquad \cdots\cdots(9)$$

より，

$$\begin{cases} a_j>a_{j+1}\text{のとき, 最小数は } a_{j+1}\text{の 1 個} \\ a_j=a_{j+1}\text{のとき, 最小数は } a_j,\ a_{j+1}\text{の 2 個} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(10)$$

(5), (7), (10) により，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の最小数は 1 個または 2 個である．