

【7.1】

正整数 N に対して, $x+y+z=N$ を満たす非負整数解 (x, y, z) を考える.

- (1) 非負整数解 (x, y, z) の個数を求めよ.
 (2) N を 2 以上の偶数とする.
 x, y, z のすべてが偶数となる解の個数を求めよ. また, x, y, z の中に奇数が含まれる解の個数を求めよ.
 (3) N を 3 以上の奇数とする.
 x, y, z のすべてが奇数となる解の個数を求めよ. また, x, y, z の中に偶数が含まれる解の個数を求めよ.
 (4) M を正整数として, $N = M^2$ とするとき, x が平方数となる解の個数を求めよ.

【解答】

(1) 題意より,

$${}_3H_N = {}_{N+2}C_N = {}_{N+2}C_2 = \frac{1}{2}(N+2)(N+1) \quad \dots\dots(1.1)$$

(2) $N = 2m (m \geq 1)$ として,

$$\begin{cases} x+y+z=N \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x'+2y'+2z'=2m \\ x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x'+y'+z'=m \\ x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0 \end{cases} \quad \dots\dots(1.2)$$

と書き換えれば, x, y, z のすべてが偶数となる非負整数解の個数は,

$${}_3H_m = \frac{1}{2}(m+2)(m+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}N+2\right)\left(\frac{1}{2}N+1\right) = \frac{1}{8}(N+4)(N+2) \quad \dots\dots(1.3)$$

N が偶数のとき, x, y, z の中の奇数の個数は 0 または 2 であるから,

奇数が 2 個含まれる非負整数解の個数は, (1.1), (1.3) により,

$$\frac{1}{2}(N+2)(N+1) - \frac{1}{8}(N+4)(N+2) = \frac{3}{8}N(N+2) \quad \dots\dots(1.4)$$

(3) $N = 2m+1 (m \geq 1)$ として,

$$\begin{cases} (2x'+1) + (2y'+1) + (2z'+1) = 2m+1 \\ x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x'+y'+z' = m-1 \\ x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0 \end{cases} \quad \dots\dots(1.5)$$

と書き換えれば, x, y, z のすべてが奇数となる非負整数解の個数は,

$${}_3H_{m-1} = \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(N-1)\left(\frac{1}{2}(N-1)+1\right) = \frac{1}{8}(N-1)(N+1) \quad \dots\dots(1.6)$$

N が奇数のとき, x, y, z の中の偶数の個数は 0 または 2 であるから,

偶数が 2 個含まれる非負整数解の個数は, (1.1), (1.6) により,

$$\frac{1}{2}(N+2)(N+1) - \frac{1}{8}(N-1)(N+1) = \frac{3}{8}(N+1)(N+3) \quad \dots\dots(1.7)$$

(4) $N = M^2$ のとき, 平方数となる x は,

$$x = 0, 1, 4, \dots, M^2 \quad \dots\dots(1.8)$$

であるから, 方程式

$$y+z = M^2 - k^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, M) \quad \dots\dots(1.9)$$

の非負整数解 (y, z) の個数は, $M^2 - k^2 + 1$ 個である.

$$\therefore \sum_{k=0}^M (M^2 - k^2 + 1) = (M+1)(M^2+1) - \frac{1}{6}M(M+1)(2M+1) = \frac{1}{6}(M+1)(4M^2 - M + 6) \quad \dots\dots(1.10)$$

【7.2】

白球 n 個, 赤球 n 個の $2n$ 個の球を 1 個ずつ箱に入れていくとき, 箱の中の状態が常に

$$(\text{白球の個数}) \geq (\text{赤球の個数}) \quad \dots\dots(2.1)$$

となるような入れ方の総数を c_n で表す. ここで, 同じ色の球は区別しないものとする.

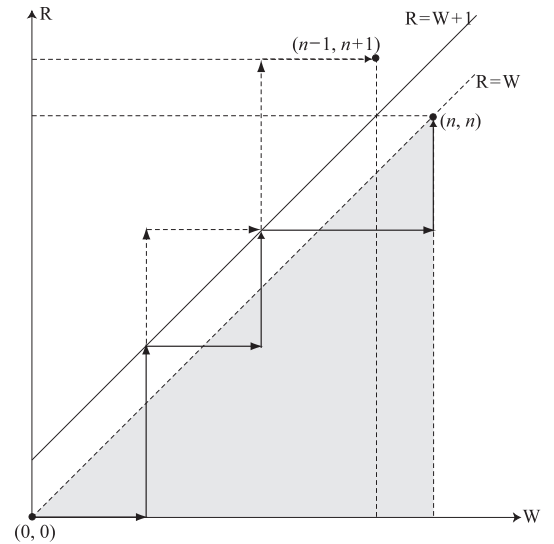
(1) $c_n = \frac{2n C_n}{n+1}$ が成り立つことを示せ.

(2) c_n が次の漸化式を満たすことを式の持つ幾何学的な意味を利用して説明せよ.

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \dots\dots(2.2)$$

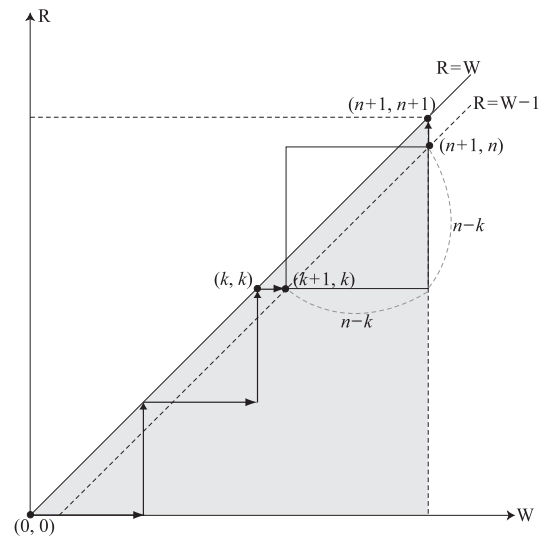
【解答】

(1) 白球, 赤球の入れ方を WR 平面内の格子点間の移動経路に対応させて考える. 条件 (2.1) を満たす入れ方は, 原点 $(0, 0)$ から点 (n, n) への経路の中で, 領域 $W \geq R$ をはみ出さない経路に 1:1 に対応する. 2点 $(0, 0)$, (n, n) を対角の頂点とする正方形領域の周および内部の経路の総数は, $2n C_n$ 通りある. この経路の内, 領域 $W \geq R$ をはみ出る経路のそれぞれに対して, 最初に直線 $R = W + 1$ に接触した点から点 (n, n) に至る部分を直線 $R = W + 1$ に関して折り返せば, 折り返した部分の経路はすべて点 $(n-1, n+1)$ に到達する. この折り返しの操作を領域 $W \geq R$ を外れるすべての経路に対して適用すれば, (2.1) を満たさない経路は, すべて原点 $(0, 0)$ と点 $(n-1, n+1)$ を対角の頂点とする長方形領域の周および内部の経路に 1:1 に対応する. この長方形領域内の経路の総数は $2n C_{n+1}$ 通りあるから, (2.1) を満たす経路は,



$$2n C_n - 2n C_{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{2n C_n}{n+1} \quad \therefore c_n = \frac{2n C_n}{n+1} \quad \dots\dots(2.3)$$

(2) c_{n+1} に対応するすべての経路の中で, 直線 $R = W$ と最後に接触する点が (k, k) ($0 \leq k \leq n$) である経路の個数は, $c_k \cdot c_{n-k}$ で表される. 何故なら, 原点 $(0, 0)$ から点 (k, k) に至る経路で直線 $R = W$ を超えない経路の総数が c_k であり, 点 $(k+1, k)$ から点 $(n+1, n)$ に至る経路で直線 $R = W - 1$ を超えない経路の総数が c_{n-k} であるからである. 従って, c_{n+1} のすべての経路に対して, 最後に直線 $R = W$ に接触した点 (k, k) ($0 \leq k \leq n$) で分類して, それぞれの経路数を足し合わせるにより,



$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \dots\dots(2.2)$$

なる漸化式が得られる.

[Note] c_n を Catalan Number といい、その母関数を求める。

$\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を係数とする無限次数の多項式

$$u(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \quad \cdots \cdots (2.4)$$

に対して、

$$\begin{aligned} \{u(x)\}^2 &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) \\ &= c_0^2 + (c_0 c_1 + c_1 c_0)x + (c_0 c_2 + c_1^2 + c_2 c_0)x^2 + \cdots + (c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \cdots + c_{n-1} c_1 + c_n c_0)x^n + \cdots \\ &= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_{n+1} x^n + \cdots = \frac{u(x) - c_0}{x} \quad \cdots \cdots (2.5) \end{aligned}$$

ここで、漸化式 (2.2) を用いた。

(2.5) を整理して、

$$x\{u(x)\}^2 - u(x) + c_0 = 0 \quad \cdots \cdots (2.6)$$

(2.6) を $u(x)$ について解いて、

$$u(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \quad \cdots \cdots (2.7)$$

ここで、 $x \rightarrow 0$ のときに $u(x)$ が発散しないために、

$$u(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} \quad \cdots \cdots (2.8)$$

は不適合と考えてよい。(以降は理系のための議論である)

無理関数 $\sqrt{1 - 4x}$ の $x = 0$ の周りの Taylor 展開

$$\sqrt{1 - 4x} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n)!}{n!(n+1)!} x^{n+1} \quad \cdots \cdots (2.9)$$

を用いれば、

$$u(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n C_n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \cdots \cdots (2.10)$$

が成り立つので、(2.8) を $\{c_n\}$ の母関数と考えてよい。

[Prob.] 微分公式

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \sqrt{1 - 4x} = -\frac{2(2n)!}{n!} (1 - 4x)^{-\frac{2n+1}{2}} \quad \cdots \cdots (2.11)$$

の成立を帰納法によって確認し、 $\sqrt{1 - 4x}$ を $x = 0$ の周りで Taylor 展開せよ。

【7.3】

$n \geq 3$ として、整数 n, k は $1 \leq k \leq n$ を満たすものとする。

1, 2, \dots , n の番号の付いた n 個の球を区別のつかない k 個の箱に入れる入れ方の総数を ${}_nS_k$ で表す。

ただし、いずれの箱も球の入っていない状態は起こらないものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $2 \leq k \leq n$ とするとき、 ${}_{n+1}S_k$ を ${}_nS_{k-1}, {}_nS_k$ を用いて表せ。
- (2) ${}_nS_{n-1}, {}_nS_{n-2}$ をそれぞれ求めよ。
- (3) ${}_nS_3, {}_nS_4$ をそれぞれ求めよ。

【解答】

(1) 1, 2, \dots , n の球が既に $k-1$ 個の箱に入っているとき、新たに追加した球 $n+1$ を新たに追加した 1 個の箱に入れて、結果として k 個の箱を作る場合と、1, 2, \dots , n の球が既に k 個の箱に入っていて、新たに追加した球 $n+1$ を既存の k 個の箱の何れかに入れる場合とに分けて考えて、

$${}_{n+1}S_k = {}_nS_{k-1} + k {}_nS_k \quad \dots\dots(3.1)$$

(2) n 個の球を $n-1$ 個の箱に入れるので、何れか 1 個の箱には 2 個の球 j, k ($j \neq k$) が入る。(∵ 空箱はない) この同一の箱に入る 2 個の球の選び方は ${}_nC_2$ 通りあるので、

$${}_nS_{n-1} = {}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1) \quad \dots\dots(3.2)$$

次に、 n 個の球を $n-2$ 個の箱に入れる方法は 2 通りある。即ち、 $n-2$ 個の箱の内の 1 個だけに i, j, k の 3 個の球を入れる場合と、 $n-2$ 個の箱の内の 2 個に $\{i, j\}, \{k, l\}$ の 2 個ずつの球を入れる場合である。従って、

$${}_nS_{n-2} = {}_nC_3 + {}_nC_2 \times {}_{n-2}C_2 \times \frac{1}{2!} = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-5) \quad \dots\dots(3.3)$$

(3) まず、3 個の箱に A_1, A_2, A_3 の名前を付ける。このとき、球 1 を A_1, A_2, A_3 の何れかに入れる方法は 3 通り、同様に、球 2 の入れ方も 3 通り、 \dots 、球 n の入れ方も 3 通りであるから、合わせて 3^n 通りの入れ方がある。この 3^n 通りの内で、 A_1 が空であるような入れ方、即ち、1, 2, \dots , n の何れの球も A_2 または A_3 に入れる方法は 2^n 通りあり、同様に、 A_2 が空であるような入れ方も、 A_3 が空であるような入れ方も 2^n 通りある。更に、2 個の箱 A_1, A_2 が空であるような入れ方、即ち、 A_3 にのみすべての球を入れる方法は 1 通りであるから、同様に、2 個の箱が空になる入れ方、即ち、1 個の箱にのみすべての球を入れる方法は 3 通りである。ここで、 A_k ($k = 1, 2, 3$) が空になる、即ち、 $A_k = \{0\}$ となる入れ方の総数を記号 $|A_k|$ で表し、3 個の箱への入れ方の総数を記号 $|\Omega| = 3^n$ で表せば、名前を付けた 3 個の箱にどの箱も空にならないように n 個の球を入れる方法の総数は、次の式で表すことができる。(Venn Diagram)

$$\begin{aligned} & |\Omega| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= |\Omega| - \sum_{k=1}^3 |A_k| + \sum_{1 \leq j < k \leq 3} |A_j \cap A_k| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 3} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &= 3^n - 3 \times 2^n + 3 \times 1^n - 0^n = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \quad \dots\dots(3.4) \end{aligned}$$

ここで、 A_1, A_2, A_3 の区別による重複を除けば、

$${}_nS_3 = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2} \quad \dots\dots(3.5)$$

4 個の箱 A_1, A_2, A_3, A_4 の場合も同様にして,

$$\begin{aligned}
 & |\Omega| - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| \\
 & + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
 & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
 & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
 \iff & |\Omega| - \sum_{k=1}^4 |A_k| + \sum_{1 \leq j < k \leq 4} |A_j \cap A_k| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \\
 & = 4^n - {}_4C_1(4-1)^n + {}_4C_2(4-2)^n - {}_4C_3(4-3)^n + (4-4)^n \\
 & = 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 \cdot 1^n \quad \dots\dots(3.6)
 \end{aligned}$$

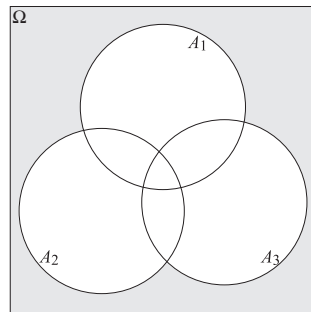
$$\therefore {}_nS_4 = \frac{4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 \cdot 1^n}{4!} = \frac{4^{n-1} - 3^n + 3 \cdot 2^{n-1} - 1}{3!} \quad \dots\dots(3.7)$$

[Note] 一般に,

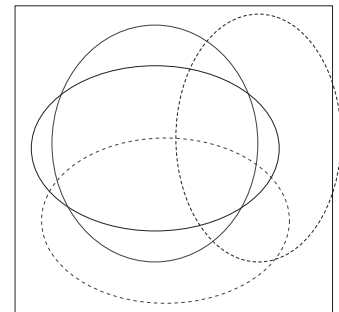
$${}_nS_k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k {}_kC_j (-1)^j (k-j)^n \quad \dots\dots(3.8)$$

が成り立ち, ${}_nS_k$ を Stirling Number という.

次頁以降, 包除原理, 母関数の 2 通りの方法による (3.8) の証明を与える.



Venn diagram : $k=3$



Venn diagram : $k=4$

【包除原理を用いた証明】

数列 $\{ {}_n T_k \}_{k=1}^n$ を

球 $1, 2, \dots, n$ を k 個の箱 A_1, A_2, \dots, A_k に入れる方法の総数 (空箱なし)

として定義すれば,

$${}_n S_k = \frac{1}{k!} {}_n T_k \quad \dots\dots(3.9)$$

が成り立つ. このとき,

$${}_n T_k = \sum_{j=0}^k {}_k C_j (-1)^j (k-j)^n \quad \dots\dots(3.10)$$

が成り立つことを包除原理を用いて証明する.

集合 $\Omega, A_j (j = 1, 2, \dots, k)$ を

$$\begin{cases} \Omega : \text{球 } 1, 2, \dots, n \text{ を箱 } A_1, A_2, \dots, A_k \text{ に入れるすべての入れ方} \\ A_j : \Omega \text{ の内で箱 } A_j (j = 1, 2, \dots, k) \text{ が空になる入れ方} \end{cases} \quad \dots\dots(3.11)$$

として定義すると,

$${}_n T_k = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = k^n - |\bigcup_{j=1}^k A_j| \quad \dots\dots(3.12)$$

が成り立つので, ある整数 k に対して,

$$\begin{aligned} |\bigcup_{j=1}^k A_j| &= \sum_{j=1}^k |A_j| - \sum_{1 \leq j(1) < j(2) \leq k} |A_{j(1)} \cap A_{j(2)}| \\ &\quad + \dots + (-1)^{m-1} \times \sum_{1 \leq j(1) < \dots < j(m) \leq k} |A_{j(1)} \cap \dots \cap A_{j(m)}| \\ &\quad + \dots + (-1)^{k-1} \times \sum_{1 \leq j(1) < \dots < j(k) \leq k} |A_{j(1)} \cap \dots \cap A_{j(k)}| \quad \dots\dots(3.13) \end{aligned}$$

を仮定する. ここで,

$$\sum_{1 \leq j(1) < \dots < j(m) \leq k} |A_{j(1)} \cap \dots \cap A_{j(m)}| = {}_k C_m (k-m)^n \iff |\bigcup_{j=1}^k A_j| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} {}_k C_j (k-j)^n \quad \dots\dots(3.14)$$

であることに注意する.

(3.13), (3.14) の仮定の下に,

$$\begin{aligned} |\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j| &= |A_{k+1} \cup (\bigcup_{j=1}^k A_j)| = |A_{k+1}| + |\bigcup_{j=1}^k A_j| - |A_{k+1} \cap (\bigcup_{j=1}^k A_j)| \\ &= |A_{k+1}| + \sum_{j=1}^k |A_j| - \sum_{1 \leq j(1) < j(2) \leq k} |A_{j(1)} \cap A_{j(2)}| + \dots + (-1)^{m-1} \times \sum_{1 \leq j(1) < \dots < j(m) \leq k} |A_{j(1)} \cap \dots \cap A_{j(m)}| \\ &\quad + \dots + (-1)^{k-1} \times \sum_{1 \leq j(1) < \dots < j(k) \leq k} |A_{j(1)} \cap \dots \cap A_{j(k)}| - |\bigcup_{j=1}^k (A_j \cap A_{k+1})| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k+1} |A_j| - \sum_{1 \leq j(1) < j(2) \leq k} |A_{j(1)} \cap A_{j(2)}| + \cdots + (-1)^{m-1} \times \sum_{1 \leq j(1) < \cdots < j(m) \leq k} |A_{j(1)} \cap \cdots \cap A_{j(m)}| + \cdots \\
&+ (-1)^{k-1} \times \sum_{1 \leq j(1) < \cdots < j(k) \leq k} |A_{j(1)} \cap \cdots \cap A_{j(k)}| - \sum_{j=1}^k |A_j \cap A_{k+1}| + (-1)^2 \times \sum_{1 \leq j(1) < j(2) \leq k} |A_{j(1)} \cap A_{j(2)} \cap A_{k+1}| + \cdots \\
&+ (-1)^m \times \sum_{1 \leq j(1) < \cdots < j(m) \leq k} |A_{j(1)} \cap \cdots \cap A_{j(m)} \cap A_{k+1}| + \cdots + (-1)^k \times \sum_{1 \leq j(1) < \cdots < j(k) \leq k} |A_{j(1)} \cap \cdots \cap A_{j(k)} \cap A_{k+1}|
\end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{1 \leq j(1) < \cdots < j(m+1) \leq k} |A_{j(1)} \cap \cdots \cap A_{j(m+1)}| + \sum_{1 \leq j(1) < \cdots < j(m) \leq k} |A_{j(1)} \cap \cdots \cap A_{j(m)} \cap A_{k+1}| = \sum_{1 \leq i(1) < \cdots < i(m+1) \leq k+1} |A_{i(1)} \cap \cdots \cap A_{i(m+1)}| \quad \dots\dots(3.15)$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned}
|\cup_{i=1}^{k+1} A_i| &= \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i(1) < i(2) \leq k+1} |A_{i(1)} \cap A_{i(2)}| + \cdots \\
&+ (-1)^m \times \sum_{1 \leq i(1) < \cdots < i(m+1) \leq k+1} |A_{i(1)} \cap \cdots \cap A_{i(m+1)}| + \cdots + (-1)^k \times \sum_{1 \leq i(1) < \cdots < i(k+1) \leq k+1} |A_{i(1)} \cap \cdots \cap A_{i(k)} \cap A_{i(k+1)}| \quad \dots\dots(3.16)
\end{aligned}$$

ここで, 添字 $i(m)$ ($m = 1, 2, \dots, k+1$) は $1 \leq i(1), i(2), \dots, i(k+1) \leq k+1$ なる範囲を動く.

(3.16) により,

$$\begin{aligned}
|\cup_{j=1}^{k+1} A_j| &= (k+1-1)_{k+1}^n C_1 + (-1)(k+1-2)_{k+1}^n C_2 + \cdots \\
&+ (-1)^m (k+1-(m+1))_{k+1}^n C_{m+1} + \cdots + (-1)^k (k+1-(k+1))_{k+1}^n C_{k+1} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} {}_{k+1}C_j (k+1-j)^n \quad \dots\dots(3.17)
\end{aligned}$$

従って, (3.13) \wedge (3.14) の仮定の下で (3.16) \wedge (3.17) が導けたので,

$k = 1$ の場合を含めて帰納法は完結する. 即ち,

$$\begin{aligned}
{}_n T_k &= |\Omega| - |\cup_{j=1}^k A_j| = k^n - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} {}_k C_j (k-j)^n = \sum_{j=0}^k (-1)^j {}_k C_j (k-j)^n \\
&\iff {}_n S_k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j {}_k C_j (k-j)^n \quad \dots\dots(3.8)
\end{aligned}$$

【母関数による証明】

$\{ {}_n S_k \}_{k=0}^n$ を係数とする関数列 $\{ u_n(x) \}_{n=0}^\infty$ を

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n {}_n S_k x^k = {}_n S_0 + {}_n S_1 x + {}_n S_2 x^2 + \cdots + {}_n S_n x^n \quad \cdots \cdots (3.18)$$

によって定義する. ただし, ${}_n S_0 = 1 (n \geq 1)$ である.

このとき,

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = {}_{n+1} S_0 + {}_{n+1} S_1 x + \cdots + {}_{n+1} S_{n+1} x^{n+1} \\ u_n'(x) = \sum_{k=1}^n k {}_n S_k x^{k-1} = {}_n S_1 + 2 {}_n S_2 x + 3 {}_n S_3 x^2 + \cdots + n {}_n S_n x^{n-1} \end{cases} \quad \cdots \cdots (3.19)$$

であるから, 漸化式

$${}_{n+1} S_k = {}_n S_{k-1} + k {}_n S_k \quad \cdots \cdots (3.20)$$

を考慮すれば, $\{ u_n(x) \}_{n=0}^\infty$ に対して,

$$u_{n+1}(x) = x(u_n(x) + u_n'(x)) \quad \cdots \cdots (3.21)$$

なる漸化式が成り立つ.

ここで, $u_0(x) = 1$, 即ち, ${}_0 S_0 = 1$ とする.

そこで,

$$e^x \times u_n(x) \stackrel{\text{put}}{=} v_n(x) \quad \cdots \cdots (3.22)$$

によって関数列 $\{ v_n(x) \}_{n=0}^\infty$ を定義すると,

$$v_n'(x) = e^x (u_n(x) + u_n'(x)) \quad \cdots \cdots (3.23)$$

が成り立つので, (3.21) の両辺に e^x を乗じて,

$$v_{n+1}(x) = x \times v_n'(x) \iff v_{n+1}(x) = \left(x \frac{d}{dx} \right) v_n(x) \quad \cdots \cdots (3.24)$$

従って,

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \left(x \frac{d}{dx} \right) v_{n-1}(x) = \left(x \frac{d}{dx} \right)^2 v_{n-2}(x) = \cdots \\ &= \left(x \frac{d}{dx} \right)^n v_0(x) = \left(x \frac{d}{dx} \right)^n e^x u_0(x) = \left(x \frac{d}{dx} \right)^n e^x {}_0 S_0 x^0 \end{aligned}$$

即ち,

$$v_n(x) = \left(x \frac{d}{dx} \right)^n e^x \iff u_n(x) = e^{-x} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n e^x \quad \cdots \cdots (3.25)$$

ここで, e^x, e^{-x} に対する Taylor 展開

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \quad \cdots \cdots (3.26)$$

を用いて,

$$x \frac{d}{dx} e^x = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{k!} x^k, \quad \left(x \frac{d}{dx} \right)^2 e^x = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{1}{k!} x^k, \quad \cdots, \quad \left(x \frac{d}{dx} \right)^n e^x = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{1}{k!} x^k \quad \cdots \cdots (3.27)$$

(3.26), (3.27) を (3.25) に代入して,

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \times \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{1}{k!} x^k \quad \dots\dots(3.28)$$

ここで, (3.28) の右辺は,

$$\left\{ \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} x + \frac{(-1)^2}{2!} x^2 + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} x^k + \dots \right\} \times \left\{ \frac{0^n}{0!} + \frac{1^n}{1!} x + \frac{2^n}{2!} x^2 + \dots + \frac{k^n}{k!} x^k + \dots \right\} \quad \dots\dots(3.29)$$

なる構造であるから,

(3.29) を展開したときの x^k の係数に注目して,

$${}_nS_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (k-j)^n}{j! (k-j)!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j {}_kC_j (k-j)^n \quad \dots\dots(3.8)$$

【7.4】

n を正の整数とする.

n 個の球を 3 個の箱に分けて入れる問題を考える. ただし, 空箱があってもよいものとする.

以下に述べる 4 通りの場合について, それぞれ異なる入れ方の総数を求めよ.

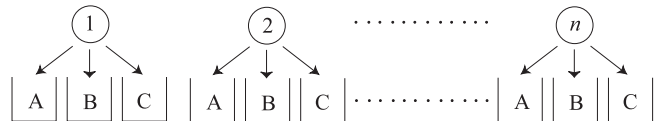
- (1) 1 から n まで番号の付いた n 個の球を A, B, C と区別された 3 個の箱に入れる方法は何通りか.
- (2) 互いに区別のつかない n 個の球を A, B, C と区別された 3 個の箱に入れる方法は何通りか.
- (3) 1 から n まで番号の付いた n 個の球を区別のつかない 3 個の箱に入れる方法は何通りか.
- (4) $n = 6m$ (m : 正整数) とする.

n 個の互いに区別のつかない球を区別のつかない 3 個の箱に入れる方法は何通りか.

【解答】

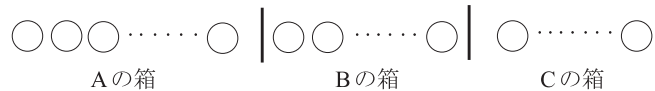
(1) 番号 1 の球を A, B, C の 3 個の箱に入れる方法は 3 通り, 同様に番号 2 の球の入れ方も 3 通り, ..., 番号 n の球の入れ方も 3 通りであるから, 求める場合の数は,

$$3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^n \text{ (通り)} \quad \dots\dots (4.1)$$



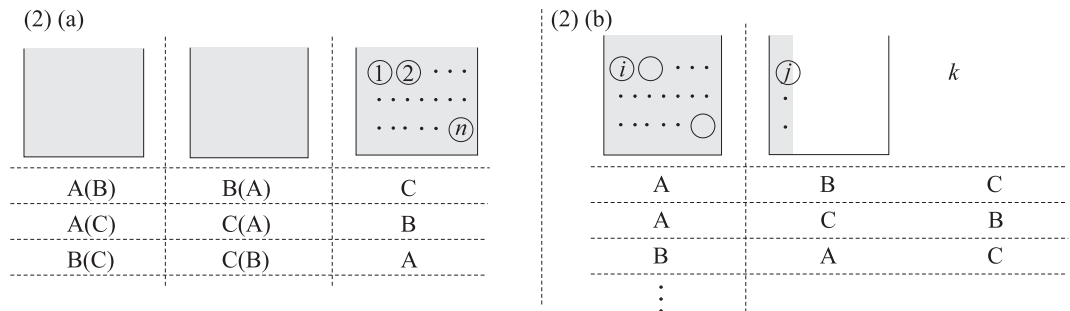
(2) n 個の と 2 本の縦棒を横一列に並べ, 左の縦棒の左側にある の個数を A に入る球の個数, 左の縦棒と右の縦棒の間にある の個数を B に入る球の個数, 右の縦棒の右側にある の個数を C に入る球の個数と考えれば, この n 個と縦棒 2 本の並べ方は, A, B, C の箱に n 個の区別のない球を入れる方法と 1:1 に対応するので, 求める場合の数は,

$${}_3H_n = {}_{n+3-1}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ (通り)} \quad \dots\dots (4.2)$$



(3) 区別のない 3 個の箱に A, B, C の名前を付けると考えて(1)の結果を利用する.

(a) n 個のすべての球が 1 個の箱に入る場合; 残りの 2 個の空箱に区別はなく, n 個のすべての球が入った箱に A, B, C の名前を付ける方法は 3 通りである. 即ち, (1) の 3^n 通りの内の 3 通りは, このような入れ方である.



(b) (a) 以外の場合; 区別のない3個の箱には番号の付いた球の入り方で既に区別が生じており, この3個の箱にA, B, Cの名前を付ける方法は3!通りあるので, (1)の 3^n から(a)の3通りを除いた $3^n - 3$ 通りは本質的に同じ球の入れ方を箱の名前の付け方で6回重複して数えていることになる.

以上, (a) および (b) により, 求める場合の数は,

$$\frac{3^n - 3}{3!} + 1 = \frac{3^{n-1} + 1}{2} \text{ (通り)} \quad \dots\dots(4.3)$$

(4) 区別のない3個の箱にA, B, Cの名前を付けると考えて(2)の結果を利用する.

(a) 3個の箱に $2m$ 個ずつ同数の球が入る場合;

区別のない3個の箱にA, B, Cの名前を付ける方法は1通りであるから, (2)の結果において $n = 6m$ として,

$${}_3H_{6m} = \frac{(6m+2)(6m+1)}{2} = (3m+1)(6m+1) = 18m^2 + 9m + 1 \text{ (通り)} \quad \dots\dots(4.4)$$

の内の1通りは, $2m$ 個ずつの同数の球の入れ方である.

(b) 3個の箱の内の2個が同数(x 個)の場合;

これらの箱にA, B, Cの名前を付ける方法は3通りである. このとき,

$$(x, y) = (0, 6m), (1, 6m-2), (2, 6m-4), \dots, (2m-1, 2m+2), (2m+1, 2m-2), \dots, (3m, 0)$$

の $3m$ 通りの入れ方が可能であるから, (4.4)の内の $3m \times 3 = 9m$ 通りは図のような(x 個, y 個)の入れ方である.

(c) 3個の箱の球の個数がすべて異なる場合;

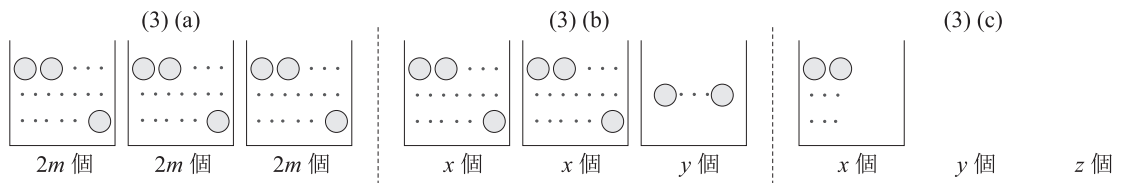
これらの箱にA, B, Cの名前を付ける方法は $3! = 6$ 通りであるから, (a), (b)の議論を考慮して,

$$\frac{18m^2 + 9m + 1 - 1 - 3m \times 3}{3!} = 3m^2 \text{ (通り)} \quad \dots\dots(4.5)$$

が図のような(x 個, y 個, z 個)の入れ方である.

以上, (a), (b), (c)により, 求める場合の数は,

$$3m^2 + 3m + 1 \text{ (通り)} \quad \dots\dots(4.6)$$



[Note] (4.6) は Stirling Number : ${}_nS_k$ を用いて,

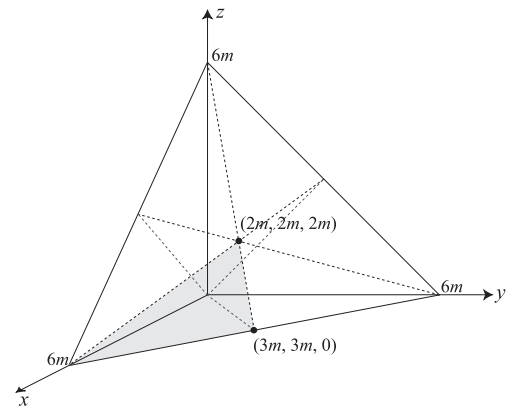
$${}_nS_1 + {}_nS_2 + {}_nS_3$$

と表せることを確認せよ.

[Note] 設問 (4) は空間領域

$$\begin{cases} x + y + z = 6m \\ x \geq y \geq z \geq 0 \end{cases}$$

内の格子点の個数を求める問題と同値である.
これを確認し, この観点から (4) の結果を導け.



[Note] $n \geq m$ とする.

n 個の球を m 個の箱に入れる問題は「場合の数」の典型問題なので, その一般的解法を整理しておく.

空箱あり	球の区別あり	球の区別なし
箱の区別あり	m^n	${}_mH_n$
箱の区別なし	$\sum_{k=1}^m {}_nS_k$	一般化不能
空箱なし	球の区別あり	球の区別なし
箱の区別あり	${}_nS_m \times m!$	${}_mH_{n-m}$
箱の区別なし	${}_nS_m$	一般化不能