

**【8.1】**

サイコロを  $n$  回振り、出た目の数の  $n$  個の積を  $X_n$  で表す.

- (1)  $X_n$  が 5 で割り切れる確率を求めよ. (2)  $X_n$  が 4 で割り切れる確率を求めよ.  
 (3)  $X_n$  が 20 で割り切れる確率を  $p_n$  とするとき、次の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n)$$

ただし、 $|r| < 1$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$  を既知としてよい.

**【解答】**

- (1)  $X_n$  が 5 で割り切れないためには、 $n$  回すべてに 1, 2, 3, 4, 6 の目が出ればよいので、

$$\begin{cases} P(X_n \not\equiv 0 \pmod{5}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n & \dots\dots(1.1) \\ P(X_n \equiv 0 \pmod{5}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n & \dots\dots(1.2) \end{cases}$$

- (2)  $X_n$  が 4 で割り切れないためには、

- $n$  回すべてに 1, 3, 5 の目が出る
- $n$  回の内、1 回に 2, 6, 残り  $n-1$  回に 1, 3, 5 の目が出る

の何れかであればよいので、

$$\begin{cases} P(X_n \not\equiv 0 \pmod{4}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n + {}_n C_1 \times \frac{1}{3} \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} & \dots\dots(1.3) \\ P(X_n \equiv 0 \pmod{4}) = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{3 \cdot 2^{n-1}} & \dots\dots(1.4) \end{cases}$$

- (3) 事象 E, F を

$$E: X_n \not\equiv 0 \pmod{5}, \quad F: X_n \not\equiv 0 \pmod{4} \quad \dots\dots(1.5)$$

によって定めれば、求める確率  $1 - p_n$  は、

$$1 - p_n = P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \quad \dots\dots(1.6)$$

ここで、 $X_n$  が 4 でも 5 でも割り切れないためには、

- $n$  回すべてに 1, 3 の目が出る
- $n$  回の内、1 回に 2, 6, 残り  $n-1$  回に 1, 3 の目が出る

の何れかであればよいので、

$$P(E \cap F) = \left(\frac{2}{6}\right)^n + {}_n C_1 \times \frac{1}{3} \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{3^n} \quad \dots\dots(1.7)$$

(1.1), (1.3), (1.7) を (1.6) に代入して、

$$\begin{aligned} 1 - p_n &= \frac{5^n}{6^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{n}{3 \cdot 2^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n} \\ &\iff \log(1 - p_n) = \log \frac{5^n}{6^n} \left( 1 + \frac{3^n}{5^n} + \frac{2n \cdot 3^{n-1}}{5^n} - \frac{(n+1)2^n}{5^n} \right) \\ &\iff \frac{1}{n} \log(1 - p_n) = \log \frac{5}{6} + \frac{1}{n} \log \left( 1 + \frac{3^n}{5^n} + \frac{2n \cdot 3^{n-1}}{5^n} - \frac{(n+1)2^n}{5^n} \right) \quad \dots\dots(1.8) \end{aligned}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$  ( $|r| < 1$ ) より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n) = \log \frac{5}{6} \quad \dots\dots(1.9)$$

【8.2】

座標平面上に  $2n$  個の点  $A_k(k, 1), B_k(k, 2)$  ( $1 \leq k \leq n$ ) がある. 線分  $A_k B_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) を縦辺といい, 線分  $A_k A_{k+1}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) および線分  $B_k B_{k+1}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) を横辺ということにする. すべての横辺には各辺独立に確率  $p$  ( $0 < p < 1$ ) で右向きの矢印が, 確率  $1-p$  で  $\times$  印が付けられており, すべての縦辺には常に上向きの矢印が付けられているものとする. このとき, 点  $A_1(1, 1)$  から出発して, 矢印の付けられている辺だけを通り, 矢印の方向に進んで, 点  $B_n(n, 2)$  に到達する経路が少なくとも 1 本存在する確率を  $Q_n$  で表す.

(1)  $Q_2, Q_3$  を求めよ. (2)  $Q_n$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) を求めよ.

【解答】

(1)  $Q_2$  に関して;

$B_1 B_2$  が開いている場合と閉じている場合に分けて考える.

$$Q_2 = p + (1-p)p = 2p - p^2 \quad \dots\dots(2.1)$$

$Q_3$  に関して;

$B_2 B_3$  が開いている場合と閉じている場合に分けて考える.

$$Q_3 = p \times Q_2 + (1-p)p^2 = 3p^2 - 2p^3 \quad \dots\dots(2.2)$$

(2)  $B_{n-1} B_n$  が開いている場合と閉じている場合に分けて考える.

$$Q_n = p \times Q_{n-1} + (1-p)p^{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \dots\dots(2.3)$$

(2.3) の両辺を  $p^n$  で割り,

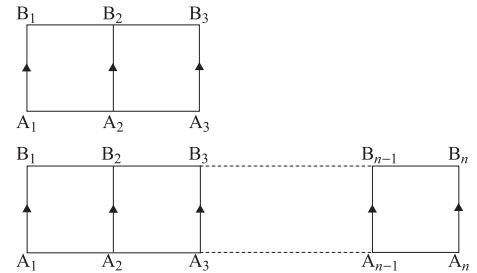
$$\frac{Q_n}{p^n} - \frac{Q_{n-1}}{p^{n-1}} = \frac{1-p}{p} \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \quad \dots\dots(2.4)$$

$\{Q_n/p^n\}$  は等差数列であるから,

$$\frac{Q_n}{p^n} = \frac{Q_2}{p^2} + (n-2) \times \frac{1-p}{p} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \dots\dots(2.5)$$

(2.5) を  $Q_n$  について解いて,

$$Q_n = np^{n-1} - (n-1)p^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \dots\dots(2.6)$$



**【8.3】**

0, 1 という 2 種類の信号をそれぞれ確率  $2/5, 3/5$  で送るデータ通信を考える. 送信データが 0 のとき, 受信側で正しく 0 と受信する確率が  $4/5$ , エラーを起こして 1 と受信する確率が  $1/5$  である. また, 送信データが 1 のとき, 確率  $9/10$  で正しく 1 と受信し, 確率  $1/10$  でエラーを起こして 0 と受信する. このとき,

0 を受信したときに送信データが実際に 0 である確率

を求めよ.

**【解答】**

'0 を発信する' という事象を  $E$ , '0 を受信する' 事象というを  $F$  と表せば,  
'1 を発信する' という事象は  $\bar{E}$ , '1 を受信する' という事象は  $\bar{F}$  と表せる.  
このとき,

$$P(E) = \frac{2}{5}, P(\bar{E}) = \frac{3}{5}, P_E(F) = \frac{4}{5}, P_E(\bar{F}) = \frac{1}{5}, P_{\bar{E}}(\bar{F}) = \frac{9}{10}, P_{\bar{E}}(F) = \frac{1}{10} \quad \dots\dots(3.1)$$

であるから, これらの確率は下図の様に図示できる.

$$\therefore P_F(E) = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{10}} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{8}{25} + \frac{3}{50}} = \frac{16}{19} \quad \dots\dots(3.1)$$

**[Note]** 条件付き確率の定義により,  $P_F(E)$  を導く;

乗法定理により,

$$P(E \cap F) = P(F) \times P_F(E) \iff P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad \dots\dots(3.3)$$

$E \cap F, \bar{E} \cap F$  は互いに排反であるから,

$$P(F) = P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap F) \quad \dots\dots(3.4)$$

(3.3), (3.4) により,

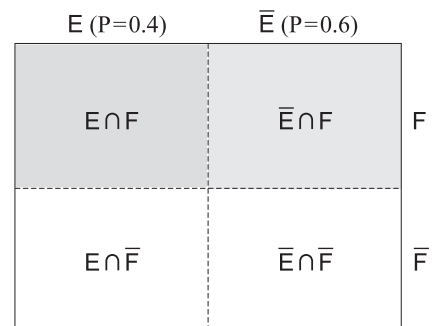
$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap F)} \quad \dots\dots(3.5)$$

ここで, 乗法定理により,

$$P(E \cap F) = P(E) \times P_E(F) \quad \wedge \quad P(\bar{E} \cap F) = P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(F) \quad \dots\dots(3.6)$$

(3.5), (3.6) により,

$$P_F(E) = \frac{P(E) \times P_E(F)}{P(E) \times P_E(F) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(F)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{10}} = \frac{16}{19} \quad \dots\dots(3.6)$$



【8.4】

$m, n$  を正の整数とする. 1 枚の硬貨を投げて, A, B の 2 人が次のようなゲームをする.

A, B の始めの得点は 0 点とする. 毎回の試行で硬貨を投げ, 表が出れば A の勝ち, 裏が出れば B の勝ちとし, 勝った方に 1 点, 負けた方に  $-1$  点が加算される. 各試行は独立として試行を続けたとき, 次の問いに答えよ. ただし, 硬貨の表裏の出る確率はともに  $1/2$  である.

(1)  $2n$  回の試行の後, A の得点が  $2m$  点である確率を求めよ.

(2)  $2n$  回の試行の後, A の得点が  $2m$  点であるとき, A の得点が常に B の得点を上回っている確率を求めよ.

【解答】

(1)  $2n$  回の試行の内, A が  $k$  回勝つとすると, A の得点に関して,

$$k + (-1)(2n - k) = 2m \iff k = n + m \quad \dots\dots(4.1)$$

が成り立ち, A が  $2m$  点を得る勝ち方の方法は,

$${}_{2n}C_{n+m} = \frac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!} \text{ (通り)} \quad \dots\dots(4.2)$$

であるから, 求める確率は,

$$\frac{{}_{2n}C_{n+m}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{4^n(n+m)!(n-m)!} \quad \dots\dots(4.3)$$

(2) A の勝ち回数を  $x$  軸, B の勝ち回数を  $y$  軸とするグラフを考える. (次頁左図)

このとき, A の得点  $>$  B の得点 を満たす A の勝ち方は, 点  $(1, 0)$  から点  $(n+m, n-m)$  への経路の内で, 領域  $y < x$  内部の経路と  $1:1$  に対応するので,

$$(1, 0) \longrightarrow (n+m, n-m) \text{ の経路総数: } {}_{2n-1}C_{n-m} \text{ (通り)} \quad \dots\dots(4.4)$$

から, 直線  $y = x$  と共有点を持つような経路の総数

$$(1, 0) \longrightarrow (n-m, n+m) \text{ の経路総数: } {}_{2n-1}C_{n+m} \text{ (通り)} \quad \dots\dots(4.5)$$

を差し引いて,

$${}_{2n-1}C_{n-m} - {}_{2n-1}C_{n+m} = \frac{(2n)!}{(n-m)!(n+m)!} \times \frac{m}{n} = {}_{2n}C_{n+m} \times \frac{m}{n} \text{ (通り)} \quad \dots\dots(4.6)$$

従って, 求める条件付き確率は,

$$\frac{{}_{2n-1}C_{n-m} - {}_{2n-1}C_{n+m}}{{}_{2n}C_{n+m}} = \frac{m}{n} \quad \dots\dots(4.7)$$

[Note] (4.4) は 2 点  $(1, 0), (n+m, n-m)$  を対角の頂点とする長方形  $\tau_1$  の周および内部にある経路の総数であり, 領域  $y < x$  をはみ出す経路も含まれている. この領域をはみ出す経路のそれぞれに対して, 最初に直線  $y = x$  に接触した点から終点  $(n+m, n-m)$  に至る部分を直線  $y = x$  に関して対称に折り返せば, 必ず点  $(n-m, n+m)$  に到達する (次頁左図). この折り返しの操作を領域からはみ出すすべての経路に対して行えば, それらは 2 点  $(1, 0), (n-m, n+m)$  を対角の頂点とする長方形  $\tau_2$  の周および内部のすべての経路と  $1:1$  に対応する. 従って, (4.6) により, 領域  $y < x$  内の経路の総数が得られることになる.

[Note] (4.3) 左辺の分母  $2^{2n}$  は,  $2n$  回の試行における A の勝ち負けすべてのパターンを網羅している.  
 即ち, A の勝ち回数が 0 回, 1 回, 2 回,  $\dots$ ,  $2n$  回のそれぞれの場合に対応する  $xy$  平面上の点

$$(0, 2n), (1, 2n-1), (2, 2n-2), \dots, (2n, 0) \quad \dots\dots(4.8)$$

に対する原点  $(0, 0)$  からの経路の総数がそれぞれ

$${}_{2n}C_0, {}_{2n}C_1, {}_{2n}C_2, \dots, {}_{2n}C_{2n} \quad \dots\dots(4.9)$$

であり, これらの総和が分母の  $2^{2n}$  の図形的な意味である (下右図). 即ち,

$${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + \dots + {}_{2n}C_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \quad \dots\dots(4.10)$$

