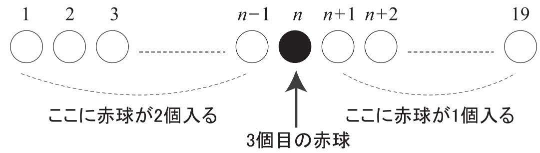
【9.1】

白球 15 個と赤球 4 個が箱に入っている．この箱から球を 1 個ずつ取り出す操作を行う．ただし，取り出した球は元に戻さない．n 回目に取り出した球が 3 個目の赤球である確率を p_n とするとき，p_n を最大にする n の値を求めよ．

【解答】



球を箱から取り出した順に 1 列に並べる．(**右図**)
このとき，あらゆる取り出し方の総数は白球 15 個，赤球 4 個の (重複) 順列に対応するので，$\dfrac{19!}{15!\,4!} = {}_{19}\mathrm{C}_4$ 通りである．一方，n 個目を 3 個目の赤球に固定した場合の 19 個の球の並べ方の総数は，1 番目から $n-1$ 番目の位置に任意に赤球 2 個を配置する並べ方の総数と，$n+1$ 番目から 19 番目の位置に任意に赤球 1 個を配置する並べ方の総数との積に等しいので，${}_{n-1}\mathrm{C}_2 \times {}_{19-n}\mathrm{C}_1$ 通りである．従って，題意の確率 p_n は，

$$p_n = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \times {}_{19-n}\mathrm{C}_1}{{}_{19}\mathrm{C}_4} \quad (3 \leq n \leq 18) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

ここで，p_n が増加 (減少) する n の範囲を調べるために，不等式

$$p_n \gtrless p_{n+1} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

を満たす n の範囲を求める．このとき，$p_n > 0\ (\forall n)$ であるから，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{{}_{n}\mathrm{C}_2 \times {}_{18-n}\mathrm{C}_1}{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \times {}_{19-n}\mathrm{C}_1} = \frac{n(18-n)}{(n-2)(19-n)} \quad (3 \leq n \leq 17) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

より，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \gtrless 1 \iff 18n - n^2 \gtrless -38 + 21n - n^2 \iff n \lessgtr \frac{38}{3} = 12.\cdots$$
$$\iff p_3 < p_4 < p_5 < \cdots < p_{12} < p_{13} \ \wedge\ p_{13} > p_{14} > \cdots > p_{18} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.4) より，p_n を最大にする n は，$n = 13$ である．

[Note] 本来，確率計算においては白球 15 個，赤球 4 個はすべて (本質的に) 異なるものとして扱うべきである．例えば，大小 2 個のサイコロを振るという場合の確率も，同形同大の (見分けの付かない)2 個のサイコロを振るという場合の確率も，目の和が 6 となる確率は等しく $\dfrac{5}{36}$ である．この場合，目の出方は (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) と考えている．従って，本問においても 19 個の球はすべて本質的に異なるものとして扱うべきであり，その場合，確率 p_n の分母は 19!，分子は ${}_{n-1}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{19-n}\mathrm{C}_1 \times 15!\,4!$ となる．このとき，

$$p_n = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{19-n}\mathrm{C}_1 \times 15!\,4!}{19!} = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{19-n}\mathrm{C}_1}{\dfrac{19!}{15!\,4!}} = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{19-n}\mathrm{C}_1}{{}_{19}\mathrm{C}_4} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

が成り立ち，異なる 19 個の球の**順列**と考えるべきところを，赤白の色の配置の**組合せ**として計算していることに注意してほしい．これは赤 4 個，白 15 個のあらゆる配置の各々に対して，等しく 15! 4! 通りずつの同色内の並べ替えが存在するからである．即ち，どのような色の配置に対する確率も**同様に確からしい**ということが，この計算の根拠である．

【9.2】

M, N の 2 人が次のルールでゲームをする．

最初，2 人の持ち点はそれぞれ m, n 点で，負けた者が勝った方に 1 点を与え，何れか一方が 0 点になった時点でゲームを終了して最終的な勝者を決める．また，1 回の勝負において M, N の勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である．このとき，M が最終的な勝者となる確率を求めよ．ただし，m, n は正の整数とする．

【解答】

Mが勝者となる確率，即ち，Nが持ち点 0 となる (破産する) 確率を求める．

Nが k 点，Mが $m+n-k$ 点持っている状態からゲームを始めて，Nが破産する確率を P_k で表す．

ただし，$0 \leq k \leq m+n$ である．このとき，Nが勝つ場合と負ける場合とに分けて漸化式を作ると，

$$
\begin{aligned}
&P_k = \frac{1}{2}P_{k+1} + \frac{1}{2}P_{k-1} \quad (1 \leq k \leq m+n-1) \\
&\iff P_{k+1} - 2P_k + P_{k-1} = 0 \quad (1 \leq k \leq m+n-1) \\
&\iff P_{k+1} - P_k = P_k - P_{k-1} \quad (1 \leq k \leq m+n-1) \qquad \cdots\cdots(2.1)
\end{aligned}
$$

(2.1) を繰り返し用いて，

$$P_{m+n} - P_{m+n-1} = P_{m+n-1} - P_{m+n-2} = \cdots = P_1 - P_0 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) より，$\{P_k\}$ は等差数列であるから，一般項を $P_k = ak + b$ と表せば，

$$P_0 = 1 \ \wedge \ P_{m+n} = 0 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

より，

$$b = 1 \ \wedge \ a = -\frac{1}{m+n} \qquad \therefore\ P_k = 1 - \frac{k}{m+n} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

従って，Mが勝者となる (Nが破産する) 確率は，

$$P_n = \frac{m}{m+n} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

[Note] (2.5) より，Mが勝者となる確率と Nが勝者となる確率の比は，

$$P_n : P_m = \frac{m}{m+n} : \frac{n}{m+n} = m : n \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

となり，これは両者の**持ち点 (資金力) の比**と一致している．

即ち，両者の実力が互角の場合，**勝敗は資金量に依存する**ことを意味している．

【9.3】

A, B の 2 人が次のようなルールでゲームをする．

- A はサイコロを自由に細工できるものとする．即ち，各目の出る確率を任意に設定できる．

ただし，一度設定した確率が投げる回数によって変動することはない．

- このサイコロを $n+1$ 回投げ，n 回だけ 1 の目が出たときに A の勝ちとし，それ以外は B の勝ちとする．

このとき，このゲームにおいては A, B のどちらが有利と言えるか．理由を付けて述べよ．

【解答】

A が 1 の目の出る確率を $x\ (0<x<1)$ と設定するとき，
$n+1$ 回の試行において n 回だけ 1 の目が出る確率は，

$$ {}_{n+1}\mathrm{C}_n x^n(1-x) = (n+1)(1-x)x^n \overset{\text{put}}{=} u(x) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

と表せ，A は $u(x)$ が最大となるように x を選ぶので，

$$u'(x) = (n+1)\big(nx^{n-1}-(n+1)x^n\big) = (n+1)x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

より，$x=\dfrac{n}{n+1}$ のとき $u(x)$ は最大となる．
このとき，$u(x)$ の最大値は，

$$u\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{\text{put}}{=} p_n \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

なる p_n で与えられる．
そこで，n が正整数値をとるときの p_n の値を調べる．

- $n=1$ のとき，

$$p_1=\left(\frac{1}{1+1}\right)^1=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

このとき，A, B の勝つ確率はともに 1/2 であり，A, B に有利，不利はない．

- $n=2,3,4,\cdots$ のとき，

$$p_n=\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\cdots}<\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{2} \quad (\because\ n\geq 2) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

このとき，A の勝つ確率は $p_n<\dfrac{1}{2}$，B の勝つ確率は $1-p_n>\dfrac{1}{2}$ であるから，A が不利である．
以上より，$n=1$ のときは A, B に有利・不利はなく，$n\geq 2$ のときは B が有利である．

【別解】 – 後半部分 –

連続変数 x の関数

$$v(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} \quad (x \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

において，両辺の対数をとり，

$$\log v(x) = -x \cdot \log \frac{x+1}{x} \quad \bigl(\because\ v(x) > 0\bigr) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

(3.8) を x で微分して，

$$\frac{\mathbf{d}v(x)}{\mathbf{d}x} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} \left(\frac{1}{x+1} - \log(1+x) + \log x\right) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

(3.9) の右辺第二因数を $w(x)$ と置けば，

$$w'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0 \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

更に，

$$w(1) = \frac{1}{2} - \log 2 < 0 \ \wedge\ \lim_{x\to\infty} w(x) = -0 \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

(3.9), (3.10), (3.11) により，

$$v'(x) < 0 \quad (x \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

従って，$\{p_n\}$ は**単調減少列**であり，$p_1 = \dfrac{1}{2}$ であるから，
$n = 1$ のときは A, B に有利 · 不利はなく，$n \geqq 2$ のときは B が有利である.

【9.4】

各世代ごとに各個体が他の個体とは独立に確率 p で 1 個，確率 $1-p$ で 2 個の新しい個体を次の世代に残し，それ自身は消滅する細胞がある．第 0 世代に 1 個であった細胞が，第 n 世代に m 個となる確率を $\mathrm{P}_n(m)$ で表すとき，$\mathrm{P}_n(1)$, $\mathrm{P}_n(2)$, $\mathrm{P}_n(3)$ をそれぞれ求めよ．ただし，n は正の整数とし，$0<p<1$ とする．

【解答】 – 漸化式による解法 –

$\mathrm{P}_n(1)$ に関して;
第 0 世代から第 n 世代まで 1 個のままで推移するので，

$$\mathrm{P}_n(1)=p^n \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

$\mathrm{P}_n(2)$ に関して;
第 $n+1$ 世代に 2 個になっているのは，第 n 世代に 1 個だった個体が第 $n+1$ 世代に 2 個に推移する場合と，
第 n 世代に既に 2 個になっていた個体の各々が第 $n+1$ 世代に 1 個ずつに推移する場合とが考えられるから，

$$\mathrm{P}_{n+1}(2)=\mathrm{P}_n(1)\times(1-p)+\mathrm{P}_n(2)\times p^2 \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

ここで，$\mathrm{P}_n(2)=a_n$ と略記して，

$$a_{n+1}=p^2a_n+p^n(1-p) \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.3) を同値変形して，

$$a_{n+1}-p^n=p^2(a_n-p^{n-1}) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

ここで，$a_n-p^{n-1}=b_n$ と置けば，

$$b_{n+1}=p^2b_n \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

(4.5) より，

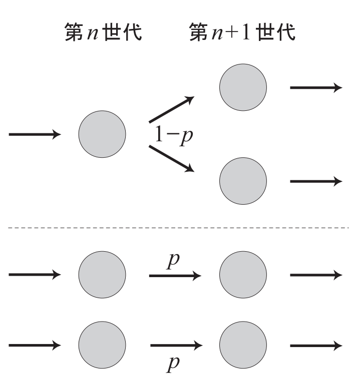
$$b_n=b_0(p^n)^2=\left(a_0-p^{-1}\right)p^{2n}=-p^{2n-1} \quad \left(\because\ a_0=0\right) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

であるから，

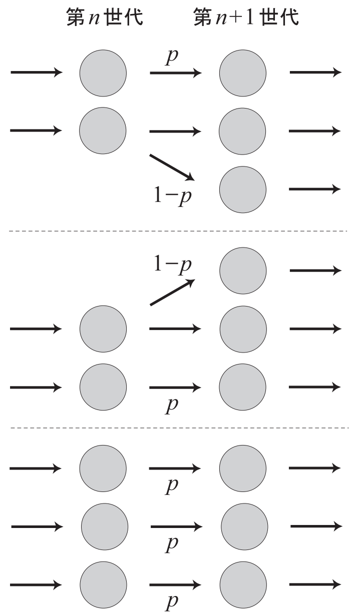
$$a_n-p^{n-1}=-p^{2n-1} \iff a_n=p^{n-1}-p^{2n-1} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

従って，

$$\mathrm{P}_n(2)=p^{n-1}(1-p^n) \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$



$P_n(3)$ に関して;
第 $n+1$ 世代に 3 個になっているのは，第 n 世代に 2 個だった個体の各々が第 $n+1$ 世代に 1 個と 2 個に推移する場合と，第 n 世代に既に 3 個になっていた個体の各々が第 $n+1$ 世代に 1 個ずつに推移する場合とが考えられるから，



$$P_{n+1}(3) = P_n(2) \times 2p(1-p) + P_n(3) \times p^3 \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

ここで，$P_n(3) = x_n$ と略記して，

$$x_{n+1} = p^3 x_n + 2p^n(1-p)(1-p^n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.10) の両辺を $p^n\,(\neq 0)$ で割って，

$$\frac{x_{n+1}}{p^n} = p^2 \times \frac{x_n}{p^{n-1}} + 2(1-p)(1-p^n) \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

ここで，$x_n \cdot p^{-(n-1)} = y_n$ と置けば，

$$y_{n+1} = p^2 y_n + 2(1-p)(1-p^n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

(4.12) を同値変形して，

$$y_{n+1} + 2p^n = p^2\big(y_n + 2p^{n-1}\big) + 2(1-p) \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

ここで，$y_n + 2p^{n-1} = z_n$ と置けば，

$$z_{n+1} = p^2 z_n + 2(1-p) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

(4.14) を同値変形して，

$$z_{n+1} - \frac{2}{1+p} = p^2\left(z_n - \frac{2}{1+p}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4.15)$$

(4.15) より，

$$z_n - \frac{2}{1+p} = p^{2n}\left(z_0 - \frac{2}{1+p}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4.16)$$

ここで，

$$z_0 = y_0 + 2p^{-1} = p x_n + \frac{2}{p} = p \times 0 + \frac{2}{p} \qquad \cdots\cdots(4.17)$$

(4.17) を (4.16) に代入して，

$$z_n - \frac{2}{1+p} = \frac{2p^{2n-1}}{1+p} \iff z_n = \frac{2(1+p^{2n-1})}{1+p} \qquad \cdots\cdots(4.18)$$

(4.18) を y_n に書き換えて，

$$y_n = \frac{2(1+p^{2n-1})}{1+p} - 2p^{n-1} = \frac{2(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p} \qquad \cdots\cdots(4.19)$$

(4.19) を x_n に書き換えて，

$$x_n = p^{n-1} \times \frac{2(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p} = \frac{2p^{n-1}}{1+p}\big(1-p^{n-1}\big)\big(1-p^n\big) \qquad \cdots\cdots(4.20)$$

従って，

$$P_n(3) = \frac{2p^{n-1}}{1+p}\big(1-p^{n-1}\big)\big(1-p^n\big) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4.21)$$

【別解】 – Σ 計算による解法 –

$\mathrm{P}_n(2)$ に関して;

最初 1 個であった個体が第 k 世代目に初めて 2 個になり，その後それぞれの個体が 1 個のまま推移する確率は，

$$p^{k-1}\times(1-p)\times(p^2)^{n-k}=p^{2n-1}(1-p)\times p^{-k} \qquad \cdots\cdots(4.22)$$

ここで，整数 k は $1\leq k\leq n$ の範囲を動けるので，

$$p^{2n-1}(1-p)\times\sum_{k=1}^{n}p^{-k}=p^{2n-1}(1-p)\times p^{-n}\times\frac{1-p^n}{1-p}=p^{n-1}(1-p^n) \qquad \cdots\cdots(4.23)$$

従って，

$$\mathrm{P}_n(2)=p^{n-1}(1-p^n)\quad(n=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

$\mathrm{P}_n(3)$ に関して;

最初 1 個であった個体が第 $k-1$ 世代目までに 2 個になっていて，その内の 1 個の個体が第 k 世代目に 2 個になり，その 2 個の個体はそれ以降 1 個ずつのまま推移する．また，他方の個体は第 k 世代目以降も 1 個のまま推移する (**下図**). このように推移する確率は，

$$\mathrm{P}_{k-1}(2)\times 2p(1-p)(p^3)^{n-k}=2p^{3n-1}(1-p)\left(p^{-2k}-p^{-k-1}\right) \qquad \cdots\cdots(4.24)$$

ここで，整数 k は $2\leq k\leq n$ の範囲を動けるので，

$$\mathrm{P}_n(3)=2p^{3n-1}(1-p)\times\sum_{k=2}^{n}\left(p^{-2k}-p^{-k-1}\right) \qquad \cdots\cdots(4.25)$$

ここで，

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(p^{-2k}-p^{-k-1}\right)&=\sum_{k=2}^{n}p^{-2k}-p^{-1}\times\sum_{k=2}^{n}p^{-k}\\&=p^{-2n}\times\frac{1-p^{2(n-1)}}{1-p^2}-p^{-1}\times p^{-n}\times\frac{1-p^{n-1}}{1-p}\\&=\frac{p^{-2n}-p^{-n-1}-p^{-n}+p^{-1}}{1-p^2} \qquad \cdots\cdots(4.26)\end{aligned}$$

(4.26) を (4.25) に代入して，

$$2p^{3n-1}(1-p)\times\frac{p^{-2n}-p^{-n-1}-p^{-n}+p^{-1}}{1-p^2}=\frac{2p^{n-1}}{1+p}\left(1-p^{n-1}-p^n+p^{2n-1}\right)=\frac{2p^{n-1}}{1+p}\left(1-p^{n-1}\right)\left(1-p^n\right)$$

従って，

$$\mathrm{P}_n(3)=\frac{2p^{n-1}}{1+p}\left(1-p^{n-1}\right)\left(1-p^n\right)\quad(n=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.21)$$