【10.1】

1 個のサイコロを続けて投げて，$\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を以下のように定義する．
出た目の順に c_1, c_2, $\cdots$ とするとき，$1 \leq k \leq n-1$ を満たす整数 k に対して，$c_k \leq c_n$ ならば $a_n = c_n$．
それ以外の場合は，$a_n = 0$ とする．ただし，$a_1 = c_1$ とする．
(1) a_n の期待値を $E(n)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E(n)$ の値を求めよ．
(2) a_1, a_2, $\cdots$, a_n の内，2 に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} N(n)$ の値を求めよ．

【解答】

(1) $a_n = c_n = k$ $(1 \leq k \leq 6)$ となるのは，c_1, $\cdots$, c_{n-1} がすべて k 以下のときであるから，

$$\mathrm{P}(a_n = k) = \frac{1}{6}\left(\frac{k}{6}\right)^{n-1} = \frac{k^{n-1}}{6^n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

このとき，

$$E(n) = \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k}{6}\right)^n = \frac{1}{6^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n + 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

従って，

$$\lim_{n\to\infty} E(n) = 1 \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(2) 確率変数 x_k を次のように定義する．

$$x_k = 1 \ (a_k = 2) \ \vee \ x_k = 0 \ (a_k \neq 2) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

このとき，a_1, $\cdots$, a_n の内で 2 に等しいものの個数は，

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

であるから，x の期待値を $E(x)$ として，

$$N(n) = E(x) = \sum_{k=1}^{n} E(x_k) \quad (\because \textbf{加法定理}) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

ここで，

$$E(x_k) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

であるから，(1.6), (1.7) により，

$$N(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1-(1/3)^n}{1-1/3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

従って，

$$\lim_{n\to\infty} N(n) = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

ARISTOS

【別解】 – 確率変数 x を導入しない –

(2) $a_1, \cdots, a_n$ の内で 2 に等しいものの個数が k 個となるのは，次の何れかの場合である.

[1] n 回すべてに 1 または 2 の目が出て，その内の k 回が 2 の目である場合.

[2] m 回目までは 1 または 2 の目が出て，その内の k 回が 2 の目であり，$m+1$ 回目が 3 以上である場合.

ただし，$m+1 \leq n$ である.

[1] の期待値;

$$\sum_{k=1}^{n} k\, {}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{6^k}\,\frac{1}{6^{n-k}} = \frac{n}{6^n}\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = \frac{n}{6^n}\cdot 2^{n-1} = \frac{n}{2\cdot 3^n} \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

[2] の期待値;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{m=1}^{n-1} {}_m\mathrm{C}_k \frac{1}{6^k}\,\frac{1}{6^{m-k}}\,\frac{4}{6} &= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{k\, {}_m\mathrm{C}_k}{6^m} \\
&= \frac{2}{3}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{6^m}\sum_{k=1}^{m} k\, {}_m\mathrm{C}_k = \frac{2}{3}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{6^m}\sum_{k=1}^{m} {}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1} \\
&= \frac{2}{3}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{6^m}\cdot 2^{m-1} = \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{3^m} \qquad \cdots\cdots(1.11)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{m}{3^m} = \frac{2m+1}{4}\cdot\frac{1}{3^{m-1}} - \frac{2m+3}{4}\cdot\frac{1}{3^m} \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

であるから,

$$\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{3^m} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{2n+1}{4\cdot 3^{n-1}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{2n+1}{4\cdot 3^n} \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

(1.10), (1.13) より,

$$N(n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 3^n} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

従って,

$$\lim_{n\to\infty} N(n) = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

ARISTOS

【10.2】

nを正の整数とする．A, B の 2 人が次のルールでゲームを行う．

Aは 0, 1, 2, $\cdots$, nと書かれた $n+1$ 枚のカードを持っており，Bは 1, 2, $\cdots$, nと書かれた n枚のカードを持っている．最初に，B が A のカードから 1 枚を取り，番号が一致するカードがあれば，その 2 枚のカードをその場に捨てる．番号が一致しないカードは，そのまま持ち続ける．次に，B にカードがあれば，A が B のカードから 1 枚を取り同様の操作をする．こうして先にカードの無くなった方を勝ちとする．A が勝つ確率を p_n, B が勝つ確率を q_n とする．ただし，相手のカードを取るとき，どのカードも等しい確率で取るものとする．

(1) p_1, p_2, q_1, q_2 の値をそれぞれ求めよ．

(2) $(n+2)p_n - n\,p_{n-2} = 1$ $(n = 3, 4, 5, \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(3) p_n, q_n をそれぞれ求めよ．

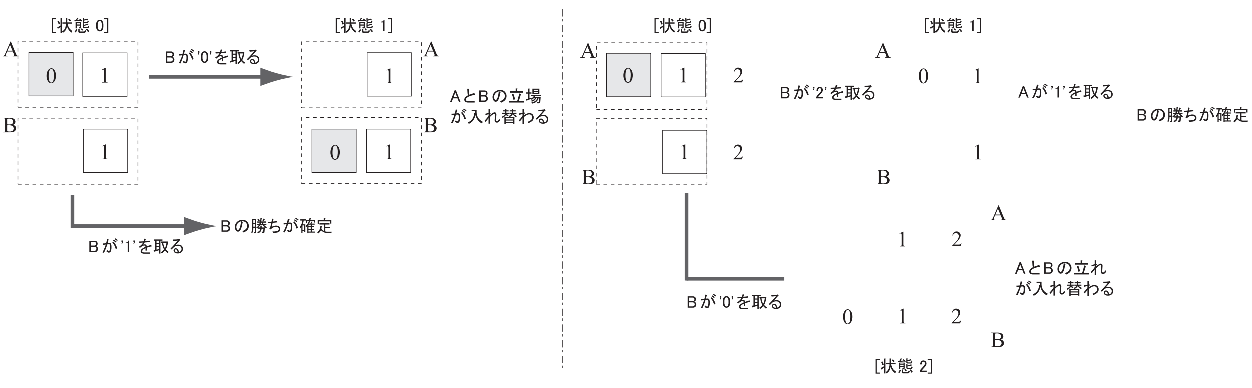
【解答】

(1) $n = 1$ の場合; 左図 [状態 0] から最初に B が確率 1/2 で $'0'$ を取れば A と B の立場が入れ替わり [状態 1] に移る．ここから B が勝つ確率は，[状態 0] から A が勝つ確率と等しく p_1 である．更に，[状態 0] から最初に B が確率 1/2 で $'1'$ を取れば B の勝ちが決まる．また，[状態 0] から B が確率 1/2 で $'0'$ を取り，[状態 1] から A が勝つ確率は，[状態 0] から B が勝つ確率と等しく q_1 である．従って，(2.1), (2.2) が成り立つ．

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}p_1 & \cdots\cdots(2.1) \\ p_1 = \dfrac{1}{2}q_1 & \cdots\cdots(2.2) \end{cases} \iff \left(p_1,\, q_1\right) = \left(\frac{1}{3},\, \frac{2}{3}\right) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

$n = 2$ の場合; 右図 [状態 0] から最初に B が確率 2/3 で $'1'$ または $'2'$ を取ると [状態 1] に移る．この [状態 1] から A が B の残りの 1 枚を取れば B の勝ちが決まる．更に，[状態 0] から B が確率 1/3 で $'0'$ を取れば，A と B の立場が入れ替わり [状態 2] に移る．[状態 2] から B が勝つ確率は，[状態 0] から A が勝つ確率に等しく p_2 である．また，[状態 0] から B が確率 1/3 で $'0'$ を取り，[状態 2] から A が勝つ確率は，[状態 0] から B が勝つ確率に等しく q_2 である．従って，(2.4), (2.5) が成り立つ．

$$\begin{cases} q_2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}p_2 & \cdots\cdots(2.4) \\ p_2 = \dfrac{1}{3}q_2 & \cdots\cdots(2.5) \end{cases} \iff \left(p_2,\, q_2\right) = \left(\frac{1}{4},\, \frac{3}{4}\right) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$



ARISTOS

(2) 下図の [状態 0] から最初に B が確率 $\dfrac{n}{n+1}$ で $'1'$ から $'n'$ の何れか 1 枚を取れば，A, B ともに 1 枚ずつ減って [状態 1] に移る．次に [状態 1] から A が何を取っても更に 1 枚ずつ減り [状態 2] に移る．この [状態 2] から B が勝つ確率は q_{n-2} である．更に，[状態 0] から最初に B が確率 $\dfrac{1}{n+1}$ で $'0'$ を取れば，A と B の立場が入れ替わり [状態 3] に移る．この [状態 3] から B が勝つ確率は，[状態 0] から A が勝つ確率と等しく p_n である．以上より，(2.7), (2.8) が導かれる．更に，成立が明らかな (2.9) と連立して，

$$\begin{cases} q_n = \dfrac{n}{n+1} q_{n-2} + \dfrac{1}{n+1} p_n & \cdots\cdots(2.7) \\ p_n = \dfrac{n}{n+1} p_{n-2} + \dfrac{1}{n+1} q_n & \cdots\cdots(2.8) \\ \qquad p_n + q_n = 1 & \cdots\cdots(2.9) \end{cases}$$

(2.8), (2.9) より q_n を消去して，

$$p_n = \frac{n}{n+1} p_{n-2} + \frac{1}{n+1}(1-p_n) \iff (n+2)p_n - n\,p_{n-2} = 1 \quad (n = 3, 4, 5, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

ここで，$(n+2)p_n = a_n$ と表せば，

$$a_n - a_{n-2} = 1 \quad (n = 3, 4, 5, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

• $n = 2m$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合;

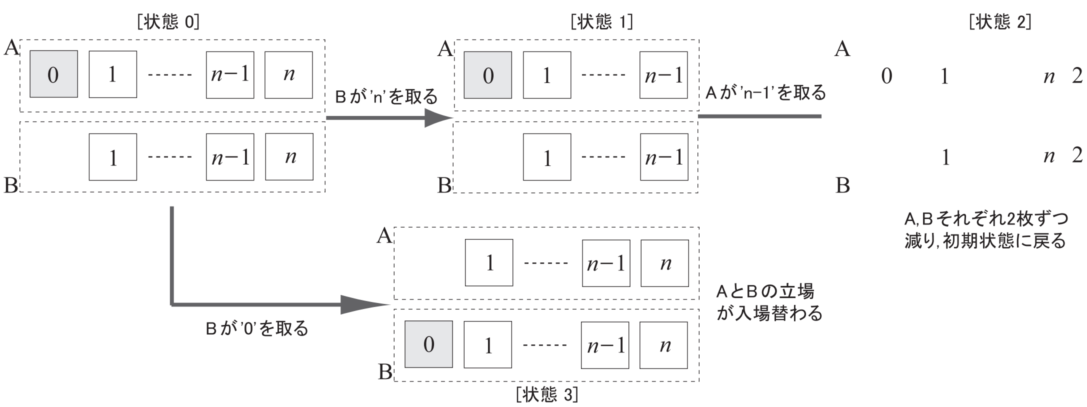
$$a_{2m} = a_2 + (m-1)\cdot 1 = 4p_2 + m - 1 = m \qquad \therefore\ p_{2m} = \frac{m}{2m+2} \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

• $n = 2m-1$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合;

$$a_{2m-1} = a_1 + (m-1)\cdot 1 = 3p_1 + m - 1 = m \qquad \therefore\ p_{2m-1} = \frac{m}{2m+1} \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

(2.12), (2.13) により，

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2(n+2)} & (n : \text{even}) \\ \dfrac{n+1}{2(n+2)} & (n : \text{odd}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.14)$$



ARISTOS

【10.3】

サイコロが 1 の目を上面にして置いてある．向かい合った 1 組の面の中心を通る直線の周りに 90° 回転する操作を繰り返すことにより，サイコロの置き方を変えていく．ただし，各回ごとに回転軸および回転する向きの選び方は，それぞれ同様に確からしいとする．第 n 回目の操作の後に 1 の目が上面にある確率を p_n，側面の何れかにある確率を q_n，底面にある確率を r_n とする．

(1) p_1, q_1, r_1 をそれぞれ求めよ．

(2) p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1} のそれぞれを p_n, q_n, r_n の式で表せ．

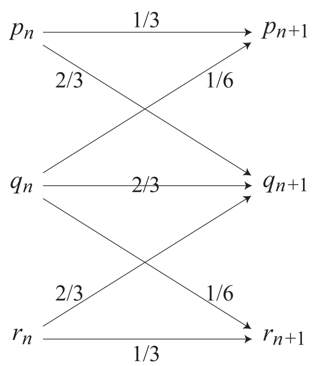
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ をそれぞれ求めよ．

【解答】

(1) 最初に上面にあった 1 の目は，確率 $\frac{1}{3}$ で上下面の中心を通る回転軸を選んだときは上面から動かず，確率 $\frac{2}{3}$ で側面の中心を通る 2 本の回転軸の何れかを選んだときは，側面に移動し，何れの回転軸を選んでも下面には移動しないので，

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad q_1 = \frac{2}{3}, \quad r_1 = 0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(2) **推移図**より，



$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{6}q_n & \cdots\cdots(3.2) \\ q_{n+1} = \dfrac{2}{3}(p_n + q_n + r_n) & \cdots\cdots(3.3) \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{6}q_n + \dfrac{1}{3}r_n & \cdots\cdots(3.4) \end{cases}$$

(3) 任意の番号 n に対して，

$$p_n + q_n + r_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

が常に成り立つので，(3.3), (3.5) により，

$$q_n = \frac{2}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

このとき，(3.2) より，

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{9} \iff p_{n+1} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{6}\right) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.1), (3.7) により，

$$p_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{2\cdot 3^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

また，(3.5), (3.6), (3.8) により，

$$r_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\cdot 3^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

(3.6), (3.8), (3.9) により，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1}{6}, \quad \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

ARISTOS

【10.4】

3 個の赤球と n 個の白球を環状に並べるものとする．
このとき，白球が連続して $k+1$ 個以上並ばない確率を求めよ．ただし，$\dfrac{n}{3} \leq k < \dfrac{n}{2}$ とする．

【解答】

3 個の赤球と n 個の白球をそれぞれ

$$\mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_2,\ \mathrm{R}_3,\ \mathrm{W}_1,\ \mathrm{W}_2,\ \cdots,\ \mathrm{W}_n \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

として，R_1 の位置を固定する．
このとき，図の様に 3 個の赤球の間に白球を予め k 個ずつ配置し，
この 3 箇所から合わせて $3k-n\,(\geq 0)$ 個の白球を取り除く方法を考えると，

$${}_3\mathrm{H}_{3k-n} = {}_{3k-n+2}\mathrm{C}_{3k-n} = {}_{3k-n+2}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}(3k-n+2)(3k-n+1) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

また，固定した赤球以外の $n+2$ 個の球を円形に配置する方法は，
赤球 2 個，白球 n 個の横一列の重複順列と同値であるから，

$$\frac{(n+2)!}{n!\,2!} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.2), (4.3) により，求める確率は，

$$\frac{(3k-n+2)(3k-n+1)}{(n+2)(n+1)} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

[Note]　確率計算においては，3 個の赤球，n 個の白球はすべて異なるものと考える．従って，回転による重複を避けるために 1 個の赤球の位置を固定してしまえば，残った $n+2$ 個の球の円順列は，本質的に横一列の順列と同値である．また，**[9.1]** の解説でも触れたが，(4.4) は順列の比でなく，(色の配置の) 組合せの比として計算している点に注目してほしい．それが本問の解答をスマートにしている要因である．

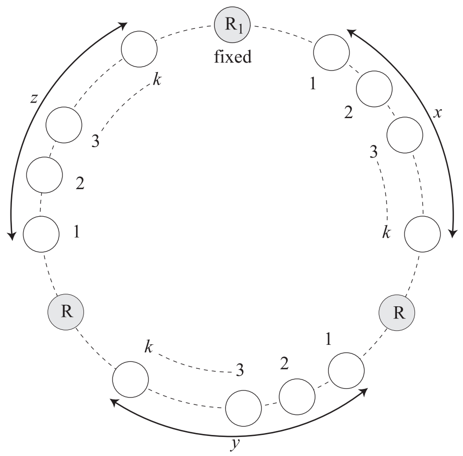
[Note]　(4.2) は次のように考えるのが自然であろう．
x, y, z の位置に配置する白球の個数をそれぞれ x, y, z 個とすると，

$$\begin{cases} x+y+z=n & \cdots\cdots(4.5) \\ 0 \leq x,\ y,\ z \leq k & \cdots\cdots(4.6) \end{cases}$$

ここで，$k-x=x'$, $k-y=y'$, $k-z=z'$ と置けば，

$$\begin{cases} x'+y'+z'=3k-n & \cdots\cdots(4.7) \\ 0 \leq x',\ 0 \leq y',\ 0 \leq z' & \cdots\cdots(4.8) \end{cases}$$

従って，(4.7), (4.8) を満たす解 (x', y', z') の個数は，${}_3\mathrm{H}_{3k-n}$ である．



ARISTOS