【11.1】

三角形 ABC の外心 O から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とするとき,

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{0}\quad(\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0)\qquad\cdots\cdots(1.1)$$

が成り立っている．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の関係式を求めよ.
また，$\cos\angle A$, $\cos\angle B$, $\cos\angle C$ をそれぞれ α, β, γ の式で表せ.

【解答】

外接円の半径を $r\,(>0)$ で表すと，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=r\qquad\cdots\cdots(1.2)$$

従って，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right),\quad\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right),\quad\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\qquad\cdots\cdots(1.3)$$

(1.3) を (1.1) に代入して，

$$\frac{\alpha}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)+\frac{\beta}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{\gamma}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\overrightarrow{0}$$

$$\iff(\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\gamma+\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\alpha+\beta)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}\qquad\cdots\cdots(1.4)$$

次に，(1.4) を同値変形して，

$$(\gamma+\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\alpha+\beta)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-(\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\qquad\cdots\cdots(1.5)$$

(1.5) の両辺の絶対値を 2 乗して，

$$(\gamma+\alpha)^2r^2+(\alpha+\beta)^2r^2+2(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\beta+\gamma)^2r^2\quad\left(\because\ (1.2)\right)\qquad\cdots\cdots(1.6)$$

内積の定義により，

$$\cos\angle\mathrm{BOC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|}=\frac{(\beta+\gamma)^2-(\gamma+\alpha)^2-(\alpha+\beta)^2}{2(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}=\frac{\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta-\alpha^2}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}\qquad\cdots\cdots(1.7)$$

半角公式により，

$$\cos^2\angle A=\frac{1+\cos\angle\mathrm{BOC}}{2}=\frac{\beta\gamma}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}\iff\cos\angle A=\sqrt{\frac{\beta\gamma}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}}\qquad\cdots\cdots(1.8)$$

ここで，$0<\angle A<\dfrac{\pi}{2}$ である.
更に，α, β, γ の文字を入れ替えることにより，

$$\cos\angle B=\sqrt{\frac{\gamma\alpha}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}},\quad\cos\angle C=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}}\quad\left(\because\ 0<\angle B,\ \angle C<\frac{\pi}{2}\right)\qquad\cdots\cdots(1.9)$$

を得る.

【11.2】

点 O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の円と，この円に内接する鋭角三角形 ABC を考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

によって 2 点 H, K を定めるとき，以下の各問いに答えよ．

(1) H は三角形 ABC の垂心であることを示せ．

(2) BC の中点を $\mathrm{M_1}$，CA の中点を $\mathrm{M_2}$，AB の中点を $\mathrm{M_3}$ とする．

更に，AH の中点を $\mathrm{N_1}$，BH の中点を $\mathrm{N_2}$，CH の中点を $\mathrm{N_3}$ とする．

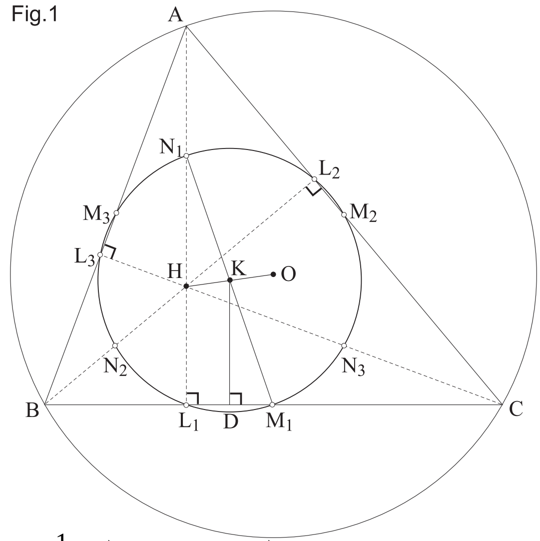
このとき，6 点 $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$, $\mathrm{M_3}$, $\mathrm{N_1}$, $\mathrm{N_2}$, $\mathrm{N_3}$ は K を中心とする同一円周上にあることを示せ．

(3) AH と BC の交点を $\mathrm{L_1}$，BH と CA の交点を $\mathrm{L_2}$，CH と AB の交点を $\mathrm{L_3}$ とする．

このとき，3 点 $\mathrm{L_1}$, $\mathrm{L_2}$, $\mathrm{L_3}$ は (2) の円周上にあることを示せ．

【解答】　– 9 点円定理 –

Fig.1



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=r^2-r^2=0\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.1) は A, B, C に関して対称であるから，

(2.2) において A, B, C の文字を入れ替えて，

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.2), (2.3) により，H は三角形 ABC の垂心である．

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{KM_1}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KM_2}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KM_3}}\right|=r/2$ であることを示す．

$$\overrightarrow{\mathrm{KM_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \qquad \therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{KM_1}}\right|=r/2 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.4) において A, B, C の文字を入れ替えることにより，

$$\overrightarrow{\mathrm{KM_2}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \wedge\ \overrightarrow{\mathrm{KM_3}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{KM_2}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KM_3}}\right|=r/2 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.4), (2.5) より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{KM}_j}\right|=r/2 \quad (j=1,\,2,\,3) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

次に，$\left|\overrightarrow{\mathrm{KN_1}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KN_2}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KN_3}}\right|=r/2$ であることを示す．

$$\overrightarrow{\mathrm{KN_1}}=\overrightarrow{\mathrm{ON_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \qquad \therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{KN_1}}\right|=r/2 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.7) において A, B, C の文字を入れ替えることにより，

$$\overrightarrow{\mathrm{KN_2}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \wedge\ \overrightarrow{\mathrm{KN_3}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{KN_2}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{KN_3}}\right|=r/2 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.7), (2.8) より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{KN}_j}\right|=r/2 \quad (j=1,\,2,\,3) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.6), (2.9) により，6 点 M_j, N_j $(j=1,\,2,\,3)$ は K を中心とする半径 $r/2$ の円周上にあることが示された．

(3) $\mathrm{KL}_j = \mathrm{KM}_j \ \ (j = 1,\ 2,\ 3)$ を示す.

三角形 $\mathrm{N_1L_1M_1}$, $\mathrm{KDM_1}$ は相似比 $2:1$ の相似直角三角形である.

$$\because\ \ \angle \mathrm{N_1M_1L_1} = \angle \mathrm{KM_1D}\ (\text{共有})\ \wedge\ \overrightarrow{\mathrm{KM_1}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{KN_1}}$$

従って, $\mathrm{DM_1} = \mathrm{DL_1}$ であり, 三角形 $\mathrm{KM_1D}$, $\mathrm{KL_1D}$ は合同な直角三角形となる.

$$\therefore\ \ \mathrm{KM_1} = \mathrm{KL_1} = r/2 \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

同様の議論で,

$$\mathrm{KM_2} = \mathrm{KL_2} = r/2\ \wedge\ \mathrm{KM_3} = \mathrm{KL_3} = r/2 \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

が導けるので, (2.10), (2.11) により,

3 点 $\mathrm{L_1}$, $\mathrm{L_2}$, $\mathrm{L_3}$ も K を中心とする半径 $r/2$ の円周上にあることがいえる.

[外心と垂心の等角共役性]

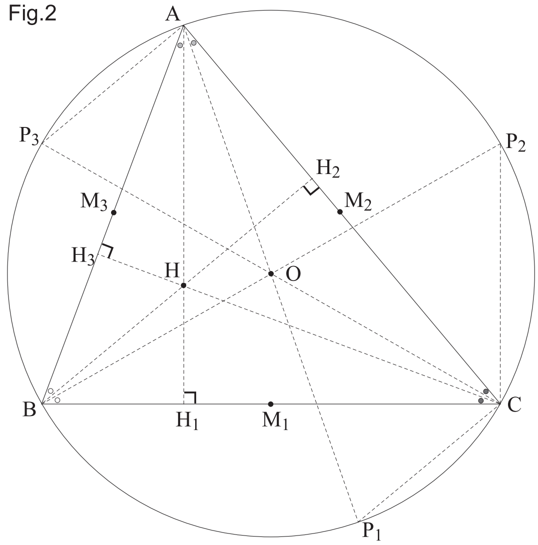
三角形 ABC において,

外心 O と垂心 H は**等角共役点**である. 即ち,

$$\begin{cases} \angle \mathrm{HBA} = \angle \mathrm{OBC} \\ \angle \mathrm{HCB} = \angle \mathrm{OCA} \\ \angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{HAB} \end{cases}$$

Fig.2 により, この事実を示せ.

Fig.2



[外心と垂心と重心の関係]

三角形 ABC において,

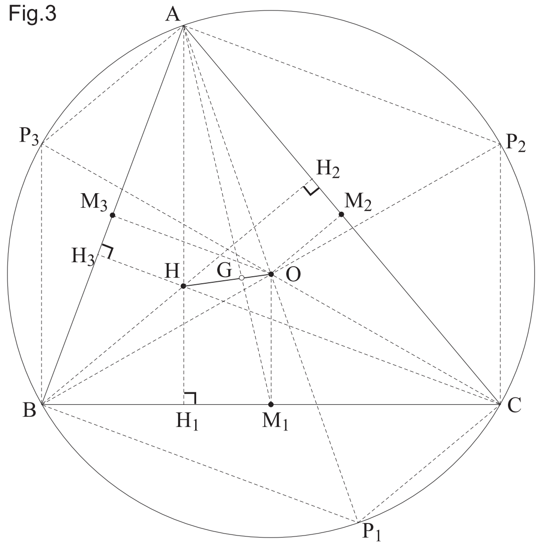
外心 O と垂心 H を結ぶ線分を Euler **線**という.

このとき, 重心 G は OH を $1:2$ の比に分ける. 即ち,

$$\mathrm{OG} : \mathrm{HG} = 1:2$$

Fig.3 により, この事実を示せ.

Fig.3



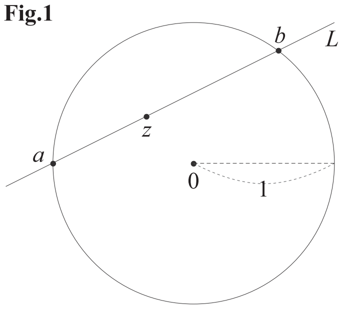
【(複素数による) 別証】

Lemma.1

右図 (**Fig.1**) において，直線 L は次のように表示される;

$$z+ab\overline{z}=a+b \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

Fig.1



[証]

$$\begin{aligned} a,\ b,\ z\ \text{が同一直線上} &\iff \arg.\frac{a-z}{a-b}\equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\iff \frac{a-z}{a-b}=\overline{\frac{a-z}{a-b}} \\ &\iff (\overline{a}-\overline{b})(a-z)=(\overline{a}-\overline{z})(a-b) \qquad \cdots\cdots(2.2) \end{aligned}$$

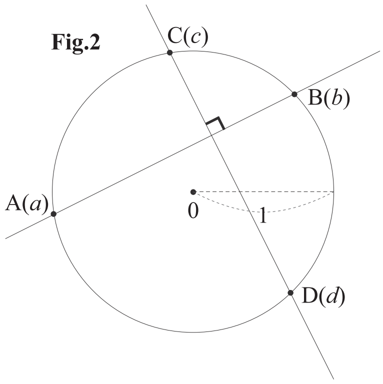
ここで，$|a|^2=|b|^2=1$ であるから，

$$\overline{a}=\frac{1}{a}\ \wedge\ \overline{b}=\frac{1}{b} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.3) を (2.2) に代入して，

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(a-z)=\left(\frac{1}{a}-\overline{z}\right)(a-b) \\ \iff &(b-a)(a-z)=(b-ab\overline{z})(a-b) \\ \iff &z+ab\overline{z}=a+b \qquad \cdots\cdots(2.1) \end{aligned}$$

Fig.2



Lemma.2

右図 (**Fig.2**) において，

直線 AB と直線 CD が直交するための必要十分条件は，次式が成り立つことである;

$$ab+cd=0 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

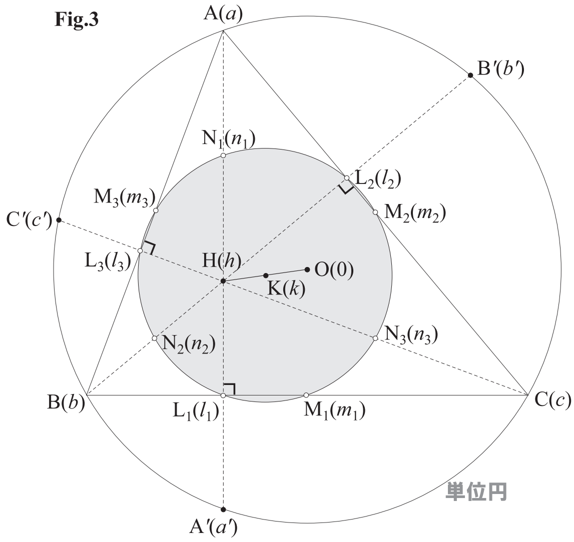
[証]

$$\begin{aligned} \arg.\frac{a-b}{c-d}\equiv\pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} &\iff \frac{a-b}{c-d}+\overline{\frac{a-b}{c-d}}=0 \\ &\iff (\overline{c}-\overline{d})(a-b)+(c-d)(\overline{a}-\overline{b})=0 \\ &\iff \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)(a-b)+(c-d)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0 \\ &\iff (d-c)(a-b)ab+(c-d)(b-a)cd=0 \\ &\iff ab+cd=0 \qquad \cdots\cdots(2.4) \end{aligned}$$

以上の補題の下に，**9 点円定理**を証明する．

[Part.1]

Fig.3



右図 (**Fig.3**) において，垂心 $\mathrm{H}(h)$ は,

$$h = a+b+c \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

と表示される.

[証]　直線 AA' および直線 BB' は,

$$\begin{cases} z+aa'\bar{z} = a+a' & \cdots\cdots(2.6) \\ z+bb'\bar{z} = b+b' & \cdots\cdots(2.7) \end{cases}$$

と表せ，AA' は BC と直交しているので,

$$aa'+bc = 0 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

同様に，BB' と CA は直交しているので,

$$bb'+ca = 0 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

このとき，(2.8) を (2.6) に代入して,

$$z-bc\bar{z} = a-\frac{bc}{a} \iff az-abc\bar{z} = a^2-bc \qquad \cdots\cdots(2.6)'$$

同様に，(2.9) を (2.7) に代入して,

$$z-ca\bar{z} = b-\frac{ca}{b} \iff bz-abc\bar{z} = b^2-ca \qquad \cdots\cdots(2.7)'$$

$(2.6)'$, $(2.7)'$ の交点が垂心 $\mathrm{H}(h)$ であるから，$(2.6)'-(2.7)'$ として,

$$(a-b)z = (a-b)(a+b)+c(a-b) \iff z = a+b+c \qquad \therefore\ h = a+b+c \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

[Part.2]

右上図 (**Fig.3**) において，頂点 A から線分 BC に下ろした垂線の足を $\mathrm{L}_1(l_1)$ と表せば,

$$l_1 = \frac{h+a'}{2}\left(= \frac{a+b+c+a'}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

と表示される.

[証]　直線 AA' と直線 BC は直交しているので,

$$z+aa'\bar{z} = a+a', \quad z+bc\bar{z} = b+c$$

に対して，$aa'+bc=0$ を用いて両式を加えると,

$$2z+(aa'+bc)\bar{z} = a+b+c+a' \iff z = \frac{a+b+c+a'}{2} \qquad \therefore\ l_1 = \frac{h+a'}{2} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

同様にして，垂線の足 $\mathrm{L}_2(l_2)$ および $\mathrm{L}_3(l_3)$ に対して,

$$l_2 = \frac{h+b'}{2} \ \wedge\ l_3 = \frac{h+c'}{2} \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

が成り立つ.

ここで，L_2 は線分 CA に対して頂点 B から下ろした垂線の足であり,

L_3 は線分 AB に対して頂点 C から下ろした垂線の足である.

[Part.3]

線分 AH, BH, CH の中点をそれぞれ

$$\mathrm{N}_1(n_1),\ \ \mathrm{N}_2(n_2),\ \ \mathrm{N}_3(n_3)$$

と表すと,

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{a+h}{2} = \dfrac{2a+b+c}{2} \\ n_2 = \dfrac{b+h}{2} = \dfrac{a+2b+c}{2} \\ n_3 = \dfrac{c+h}{2} = \dfrac{a+b+2c}{2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

線分 BC, CA, AB の中点をそれぞれ

$$\mathrm{M}_1(m_1),\ \ \mathrm{M}_2(m_2),\ \ \mathrm{M}_3(m_3)$$

と表すと,

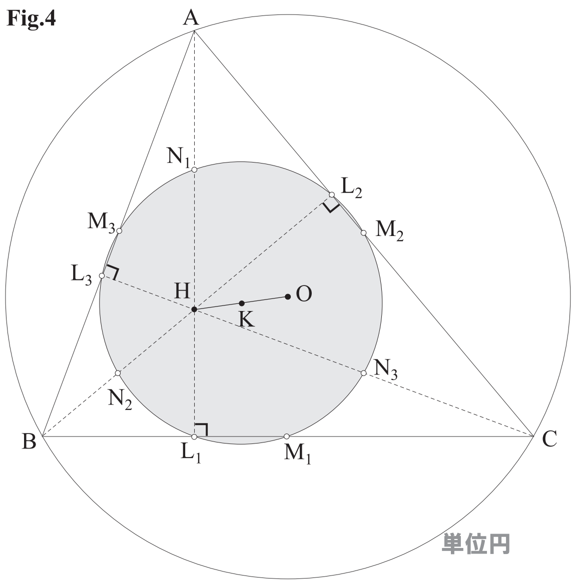
$$m_1 = \frac{b+c}{2}, \quad m_2 = \frac{c+a}{2}, \quad m_3 = \frac{a+b}{2} \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

更に, 線分 OH の中点を $\mathrm{K}(k)$ と表すと,

$$k = \frac{0+h}{2} = \frac{a+b+c}{2} \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

[Part.4 (結論)]

Fig.4



$$\begin{cases} |m_1-k| = \left|\dfrac{b+c}{2} - \dfrac{h}{2}\right| = \left|-\dfrac{a}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \\ |m_2-k| = \left|\dfrac{c+a}{2} - \dfrac{h}{2}\right| = \left|-\dfrac{b}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \\ |m_3-k| = \left|\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{h}{2}\right| = \left|-\dfrac{c}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.15)$$

$$\begin{cases} |l_1-k| = \left|\dfrac{h+a'}{2} - \dfrac{h}{2}\right| = \left|\dfrac{a'}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \\ |l_2-k| = \left|\dfrac{h+b'}{2} - \dfrac{h}{2}\right| = \left|\dfrac{b'}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \\ |l_3-k| = \left|\dfrac{h+c'}{2} - \dfrac{h}{2}\right| = \left|\dfrac{c'}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.16)$$

$$\begin{cases} |n_1-k| = \left|\dfrac{a+h}{2} - \dfrac{h}{2}\right| = \left|\dfrac{a}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \\ |n_2-k| = \left|\dfrac{b+h}{2} - \dfrac{h}{2}\right| = \left|\dfrac{b}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \\ |n_3-k| = \left|\dfrac{c+h}{2} - \dfrac{h}{2}\right| = \left|\dfrac{c}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.17)$$

(2.15), (2.16), (2.17) により,

9 点 M_j, L_j, N_j $(j = 1, 2, 3)$ は垂心 H と外心 O を結ぶ線分の中点 K を中心とする半径 1/2 の円周上にあることが示された. **(Fig.4)**

【11.3】

座標平面上にベクトル

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_4}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

が与えられているとき，以下の各領域を図示せよ.

(1) 実数 t_1, t_2 に対して，

$$\begin{cases}\overrightarrow{p}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}\\ \dfrac{1}{2}\leq t_1+t_2\leq 1,\quad t_k\geq 0\ (k=1,2)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

を満たす $\overrightarrow{p}$ を位置ベクトルとする点 P の動く領域.

(2) 実数 t_1, t_2, t_3 に対して，

$$\begin{cases}\overrightarrow{p}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}-t_3\overrightarrow{v_3}\\ t_1+t_2+t_3=1,\quad t_k\geq 0\ (k=1,2,3)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

を満たす $\overrightarrow{p}$ を位置ベクトルとする点 P の動く領域.

(3) 実数 t_1, t_2, t_3, t_4 に対して，

$$\begin{cases}\overrightarrow{p}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}+t_3\overrightarrow{v_3}+t_4\overrightarrow{v_4}\\ 1\leq t_1+t_2+t_3+t_4\leq 2,\quad t_k\geq 0\ (k=1,2,3,4)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(3.3)$$

を満たす $\overrightarrow{p}$ を位置ベクトルとする点 P の動く領域.

【解答】

(1) $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_4}$, $\overrightarrow{p}$ の終点を順に A_1, A_2, A_3, A_4, P とする.

$$\overrightarrow{p}=(t_1+t_2)\times\frac{t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}}{t_1+t_2}\overset{\text{def}}{=}(t_1+t_2)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

であり，$t_1\geq 0\wedge t_2\geq 0$ より，

$$0\leq\frac{t_1}{t_1+t_2}\leq 1\ \wedge\ 0\leq\frac{t_2}{t_1+t_2}\leq 1\ \wedge\ \frac{t_1}{t_1+t_2}+\frac{t_2}{t_1+t_2}=1\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

が成り立つので，(3.4) 右辺の $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の表す点 Q は線分 A_1A_2 上を動き，

$$\frac{1}{2}\leq t_1+t_2\leq 1\quad\left(\because\ (3.1)\right)$$

より，

P は線分 A_1A_2 を原点中心に 1/2 に相似縮小したときに通過する領域を動く. (Fig.1)

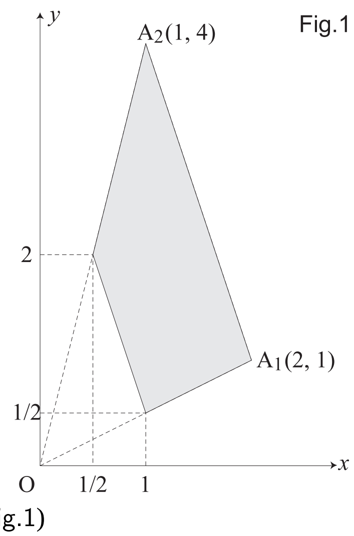


Fig.1

(2) $t_3=1-t_1-t_2$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}&=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}-(1-t_1-t_2)\overrightarrow{v_3}\\&=-\overrightarrow{v_3}+t_1\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_3}\right)+t_2\left(\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\right)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(3.6)$$

ここで, (3.2) より,

$$0\leq t_1+t_2\leq 1,\ \ t_1\geq 0,\ \ t_2\geq 0\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

であるから, (3.6) の P は,

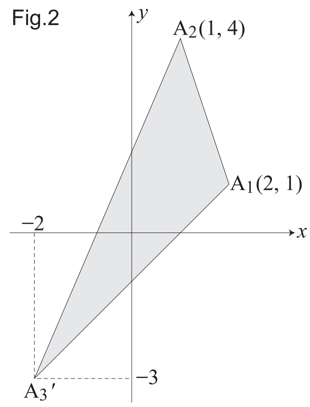
$$-\overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\iff \mathrm{A_3}'(-2,\ -3)\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

を頂点として, 2 つのベクトル

$$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix},\ \ \overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(3.8)$$

によって挟まれた三角形の周および内部の点を動く. (Fig.2)

Fig.2



(3) $t_1+t_2+t_3+t_4=1$ の場合を考える.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}&=(t_1+t_2)\times\frac{t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}}{t_1+t_2}+(t_3+t_4)\times\frac{t_3\overrightarrow{v_3}+t_4\overrightarrow{v_4}}{t_3+t_4}\\&\overset{\text{put}}{=}(t_1+t_2)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(t_3+t_4)\overrightarrow{\mathrm{OR}}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(3.9)$$

(3.9) より, Q は線分 $\mathrm{A_1A_2}$ 上を動き, R は線分 $\mathrm{A_3A_4}$ 上を動くので,
線分 QR を $t_3+t_4:t_1+t_2$ に内分する点 P は,
三角形 $\mathrm{A_1A_2A_4}$ の周および内部の点を動く.

$$\because\ \ (t_1+t_2)+(t_3+t_4)=1,\ \ t_1+t_2\geq 0,\ \ t_3+t_4\geq 0\qquad\cdots\cdots(3.10)$$

そこで, $t_1+t_2+t_3+t_4=\tau$ と置き,

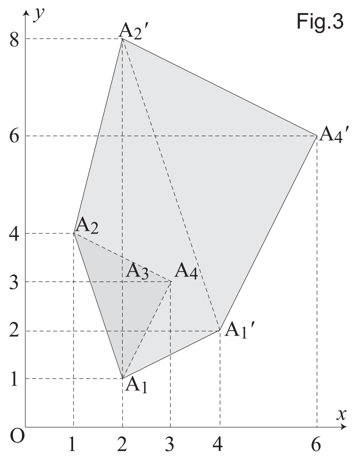
$$\frac{t_1}{\tau}=t_1',\ \ \frac{t_2}{\tau}=t_2',\ \ \frac{t_3}{\tau}=t_3',\ \ \frac{t_4}{\tau}=t_4'\qquad\cdots\cdots(3.11)$$

と表せば,

$$\begin{cases}\overrightarrow{p}=\tau\left(t_1'\overrightarrow{v_1}+t_2'\overrightarrow{v_2}+t_3'\overrightarrow{v_3}+t_4'\overrightarrow{v_4}\right)\\1\leq\tau\leq 2,\ \ \sum_{k=1}^{4}t_k'=1,\ \ t_k'\geq 0\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(3.12)$$

より, P は三角形 $\mathrm{A_1A_2A_4}$ の領域を原点中心に 2 倍に相似拡大したときに通過する領域を動く. (Fig.3)

Fig.3



[Note]　本問のテーマは次の定理にある.

<u>Theorem</u>

平面上の異なる n 個の点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n$ への位置ベクトル $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_n}$ に対して,

$$\overrightarrow{p}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}+\cdots+t_n\overrightarrow{v_n}\ \wedge\ \sum_{k=1}^{n}t_k=1\ \wedge\ t_k\geq 0\ \ (k=1,2,\cdots,n)$$

の表す点 P は, $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n$ の作る最小の凸多角形の周および内部に存在する.
ただし, いずれの 2 つのベクトル $\overrightarrow{v_k},\ \overrightarrow{v_j}\ (k\neq j)$ も平行でないとする.

【11.4】

平面上に三角形 ABC と点 P があり，

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0} & \cdots\cdots(4.1) \\ \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0,\ \gamma\geq 0,\ \alpha+\beta+\gamma=1 & \cdots\cdots(4.2) \end{cases}$$

が成り立っているとき，次の各問いに答えよ．

(1) P は三角形 ABC の周または内部にあることを示せ．

(2) 三角形 ABC が 1 辺の長さ $l\,(>0)$ の正三角形のとき，その内心を I として，$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2$ を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ l$ で表せ．

(3) (2) において，P が I を中心とする正三角形 ABC の内接円上にあるための必要十分条件は，

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

であることを示せ．

【解答】

(1) (4.1) の各ベクトルの始点を A に書き換えて，

$$-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) \iff (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

(4.2) より，$\alpha+\beta+\gamma=1$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

ここで，$\beta=\gamma=0$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{0} \iff \mathrm{P}=\mathrm{A} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

また，$\beta+\gamma>0$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\beta+\gamma)\times\frac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\beta+\gamma} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

より，線分 BC を $\gamma:\beta$ に内分する点を Q として，P は線分 AQ を $\beta+\gamma:1-(\beta+\gamma)$ に内分する位置にある．

従って，何れの場合も点 P は三角形 ABC の周または内部に存在する．

(2) (4.1) の各ベクトルの始点を I に書き換えて，

$$\alpha\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}}-\overrightarrow{\mathrm{IP}}\right)+\beta\left(\overrightarrow{\mathrm{IB}}-\overrightarrow{\mathrm{IP}}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{\mathrm{IC}}-\overrightarrow{\mathrm{IP}}\right)=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{IP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{IC}} \quad (\because (4.2)) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

ここで，三角形 ABC は 1 辺の長さ l の正三角形なので (**次頁図**),

$$|\overrightarrow{\mathrm{IA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{IC}}|=\frac{l}{\sqrt{3}} \ \wedge\ \overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\overrightarrow{\mathrm{IB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}=-\frac{1}{6}l^2 \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

(4.8), (4.9) により，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2 &= |\alpha\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2 \\ &= \alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{IA}}|^2+\beta^2|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2+\gamma^2|\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2+2\left(\alpha\beta\overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\beta\gamma\overrightarrow{\mathrm{IB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IC}}+\gamma\alpha\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right) \\ &= \frac{1}{3}l^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\frac{1}{3}l^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\frac{1}{3}l^2\left\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right\} \\ &= \frac{1}{3}l^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\,l^2 \qquad \cdots\cdots(4.10) \end{aligned}$$

従って，

$$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2=\frac{1}{3}l^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\,l^2 \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

(3) Pが長さ l の正三角形 ABC の内接円上にあるための**必要十分条件**は,

$$\mathrm{IP} = \frac{l}{2\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

であるから, (4.11), (4.12) により,

$$\frac{1}{3}l^2 - (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\,l^2 = \left(\frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^2 \iff \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

従って, 題意は示された.