【12.1】

座標空間内に 3 点 P, Q, R があって毎秒 1 の速さで，P は点 (0, 0, 0) を出発して x 軸上を正方向へ，Q は点 (2, 0, 0) を出発して y 軸と平行に正方向へ，R は点 (2, 2, 0) を出発して z 軸と平行に正方向へ進むとき，三角形 PQR の面積が最小となるのは何秒後か.

【解答】

時刻 t のとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}2\\t\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}2\\2\\t\end{pmatrix}$$

であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}t-2\\-t\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{QR}}=\begin{pmatrix}0\\2-t\\t\end{pmatrix}$$

このとき，面積 △PQR に関して,

$$\begin{aligned}4(\triangle\mathrm{PQR})^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right)^2\\&=\left((t-2)^2+(-t)^2\right)\left((2-t)^2+t^2\right)-\left(-t(2-t)\right)^2\\&=\left(2t(t-2)+4\right)^2-\left(t(t-2)\right)^2\end{aligned}$$

ここで，$u=t(t-2)\geq -1$ と置けば,

$$4(\triangle\mathrm{PQR})^2=(2u+4)^2-u^2=3\left(u+\frac{8}{3}\right)^2-\frac{16}{3}$$

これは $u=-1$ のときに最小値 3 をとるので，三角形 PQR は $t=1$ のときに面積 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で最小となる.

【12.2】

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC がある．点 G は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

を満たし，3 点 P, Q, R はそれぞれ OA, OB, OC 上にある．

(1) $0 < p < 1,\ 0 < q < 1,\ 0 < r < 1$ を満たす実数 $p,\ q,\ r$ に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とするとき，G が三角形 PQR 上にあるならば,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 4$$

が成り立つことを示せ.

(2) R から三角形 OAB に下ろした垂線の足を H とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{r}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

であることを示せ.

(3) G が常に三角形 PQR 上にあるように P, Q, R を変化させるとき,
三角錐 OPQR の体積の最小値を求めよ.

【解説】

(1) (2.1), (2.2) より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{4p}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1}{4q}\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{1}{4r}\,\overrightarrow{\mathrm{OR}} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

G が三角形 PQR 上にあるので,

$$\frac{1}{4p} + \frac{1}{4q} + \frac{1}{4r} = 1 \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 4 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2) H が平面 OAB 上の点であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (\alpha,\ \beta : \text{実数}) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

と表せて，$\overrightarrow{\mathrm{RH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{RH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{RH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{RH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \iff \begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \\ \left(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \\ \left(\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}r = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \beta - \frac{1}{2}r = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

ここで,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1 \ \wedge\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

を用いた.

(2.7) を $\alpha,\ \beta$ について解いて,

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}r \qquad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{r}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(3) 四面体 OABC の体積を V_0，四面体 OPQR の体積を V と表せば，

$$V = pqrV_0 \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

が成り立つので，pqr の値が最小のとき，V は最小となる．
相加相乗平均の不等式より，

$$\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{p}\times\frac{1}{q}\times\frac{1}{r}} \iff \frac{4}{3} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{pqr}} \iff pqr \geq \frac{27}{64} \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

ここで，(2.11) の等号成立条件は，

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} = \frac{1}{r} = \frac{4}{3} \iff p = q = r = \frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

一方，正三角形 OAB の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{RH}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{RH}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\left|\frac{r}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{r}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-r\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|}\left(\frac{r}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{r}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-r\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は外積を表す．

$$\therefore\ V_0 = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = \frac{1}{12\sqrt{2}}\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = \frac{|-2|}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

(2.10), (2.14), (2.11) により，

$$V = \frac{1}{6\sqrt{2}}pqr \geq \frac{1}{6\sqrt{2}}\times\frac{27}{64} = \frac{9}{128\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(2.15)$$

【12.3】

座標空間内の 6 個の平面

$$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$$

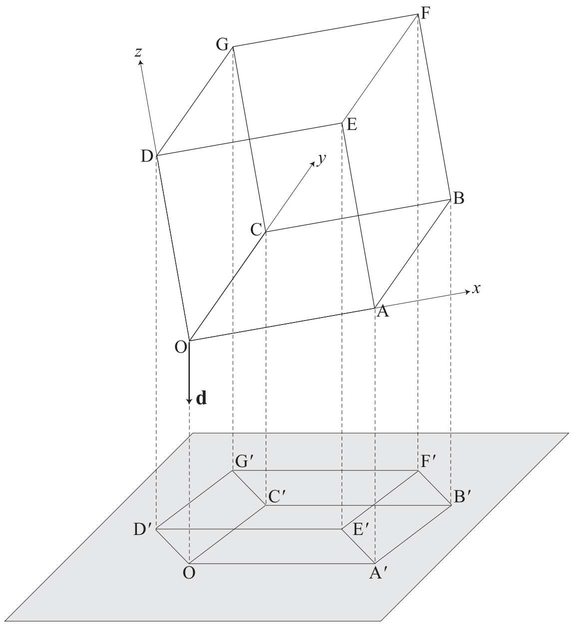
で囲まれた立方体を $\mathfrak{C}$ とする．また，

$$\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}\quad \left(a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ \left|\overrightarrow{d}\right|=1\right)$$

とする．

$\mathfrak{H}$ を原点 O を通り，$\overrightarrow{d}$ に垂直な平面とするとき，$\overrightarrow{d}$ を進行方向に持つ光線によって平面 $\mathfrak{H}$ に生じる $\mathfrak{C}$ の影の面積は $a_1+a_2+a_3$ であることを示せ．ここで，$\mathfrak{C}$ の影とは，$\mathfrak{C}$ 内の点から平面 $\mathfrak{H}$ に引いた垂線の足全体のなす図形である．

【解説】



右図のように立方体 $\mathfrak{C}$ を定め，
点 A, B, C, D, E, F, G の $\mathfrak{H}$ への正射影を
それぞれ A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′ とする．
また，正方形 OABC に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$$

とすると，正方形 OABC と $\mathfrak{H}$ とのなす角 ω は，

$$\cos\omega=\frac{\left|\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{d}\right|}{\left|\overrightarrow{e_3}\right|\left|\overrightarrow{d}\right|}=a_3$$

を満たすので，正方形 OABC を $\mathfrak{H}$ に正射影した平行四辺形 OA′B′C′ の面積は，

$$S_{\mathrm{OA'B'C'}}=S_{\mathrm{OABC}}\times\cos\omega=a_3$$

同様に，$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$ を用いて平行四辺形 OC′G′D′, B′F′G′C′ の面積を求めると，

$$S_{\mathrm{OC'G'D'}}=a_1,\quad S_{\mathrm{B'F'G'C'}}=a_2$$

従って，求めるべき面積は $a_1+a_2+a_3$ である．

【12.4】

3 組の対辺が垂直である四面体の各辺の中点は，四面体の重心を中心とする同一球面上にあることを示せ.

【解答】

題意の四面体の重心を G，4 頂点を A, B, C, D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}+\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\overrightarrow{0} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{GD}}-\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)=0 \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

(4.1) により，

$$\overrightarrow{\mathrm{GD}}-\overrightarrow{\mathrm{GC}}=-\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+2\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.2), (4.3) により，

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+2\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)=0\\ &\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}}+2\overrightarrow{\mathrm{GC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}}=0\\ &\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{GC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{GC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} \qquad \cdots\cdots(4.4)\end{aligned}$$

(4.4) の両辺に $\left|\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right|^2$ を加えて，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right|^2 \iff \left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right| \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

ここで，AC, BC の中点をそれぞれ M, L とすれば，

$$\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)\right| \iff \left|\overrightarrow{\mathrm{GM}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{GL}}\right| \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ より，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{GC}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{GD}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right)=0 \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(4.1) により，

$$\overrightarrow{\mathrm{GD}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}=-\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+2\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(4.7), (4.8) により，

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+2\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)=0\\ &\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}}+2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}=0\\ &\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{GB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}} \qquad \cdots\cdots(4.9)\end{aligned}$$

(4.9) の両辺に $\left|\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right|^2$ を加えて，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right|^2 \iff \left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right| \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

ここで，AB の中点を N とすれば，

$$\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)\right| \iff \left|\overrightarrow{\mathrm{GN}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{GL}}\right| \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

(4.6), (4.11) により,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GM}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{GL}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{GN}}\right| \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

ここで, AD, BD, CD の中点をそれぞれ L′, M′, N′ とすれば,
(4.1) により,

$$\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GD}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right| \ \wedge\ \left|\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GD}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{GC}}+\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right| \ \wedge\ \left|\overrightarrow{\mathrm{GC}}+\overrightarrow{\mathrm{GD}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}\right| \\
&\qquad \iff \left|\overrightarrow{\mathrm{GL'}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{GL}}\right| \ \wedge\ \left|\overrightarrow{\mathrm{GM'}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{GM}}\right| \ \wedge\ \left|\overrightarrow{\mathrm{GN'}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{GN}}\right| \qquad \cdots\cdots(4.13)
\end{aligned}$$

(4.12), (4.13) により,

$$\mathrm{GM} = \mathrm{GL} = \mathrm{GN} = \mathrm{GM'} = \mathrm{GL'} = \mathrm{GN'} \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

従って, 四面体の各辺の中点 M, L, N, M′, L′, N′ は重心 G を中心とする同一球面上にある.