

【13.1】

$n$  はすべての正整数を動くとする.

複素数  $\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$  に対して,

$$\frac{(1 - \alpha^n)(1 - \alpha^{2n})(1 - \alpha^{3n})(1 - \alpha^{4n})(1 - \alpha^{5n})}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^3)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^5)} \dots\dots(1.1)$$

の値を求めよ.

【解答】

複素数

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} \dots\dots(1.2)$$

は 1 の 6 乗根で, 偏角が正で最小なもの. 即ち, 1 の原始 6 乗根である.

従って, 1 のすべての 6 乗根は,

$$\alpha^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \dots\dots(1.3)$$

の形に表せる.

$n \equiv k \pmod{6}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) のとき,

$$\alpha^n = \alpha^k \dots\dots(1.4)$$

であるから, (1.1) における  $n$  を mod.6 で考えてよい.

このとき,  $\alpha^n, \alpha^{2n}, \dots, \alpha^{5n}$  の値を表にすると,

$n$	$\alpha^n$	$\alpha^{2n}$	$\alpha^{3n}$	$\alpha^{4n}$	$\alpha^{5n}$
1	$\alpha$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^5$
2	$\alpha^2$	$\alpha^4$	$\alpha^6 = 1$	$\alpha^8 = \alpha^2$	$\alpha^{10} = \alpha^4$
3	$\alpha^3$	$\alpha^6 = 1$	$\alpha^9 = \alpha^3$	$\alpha^{12} = 1$	$\alpha^{15} = \alpha^3$
4	$\alpha^4$	$\alpha^8 = \alpha^2$	$\alpha^{12} = 1$	$\alpha^{16} = \alpha^4$	$\alpha^{20} = \alpha^2$
5	$\alpha^5$	$\alpha^{10} = \alpha^4$	$\alpha^{15} = \alpha^3$	$\alpha^{20} = \alpha^2$	$\alpha^{25} = \alpha$
6	1	1	1	1	1

$n = 2, 3, 4, 6$  のとき, (1.1) 分子の少なくとも 1 つの因数は 0 であり,

$n = 1, 5$  のとき, (1.1) 分子と分母の因数はすべて一致する.

$$\therefore \frac{(1 - \alpha^n)(1 - \alpha^{2n})(1 - \alpha^{3n})(1 - \alpha^{4n})(1 - \alpha^{5n})}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^3)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^5)} = \begin{cases} 1 & (n \equiv 1, 5 \pmod{6}) \\ 0 & (n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{6}) \end{cases} \dots\dots(1.5)$$

[Note] 一般に, 1 の  $n$  乗根

$$z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

に対して,  $\gcd(n, k) = 1$  なる  $z^k$  を原始  $n$  乗根といい,

$$z^k, z^{2k}, z^{3k}, \dots, z^{(n-1)k}, z^{nk}$$

により, すべての  $n$  乗根を網羅する.

本問は原始根のこの性質をテーマにしており, 過去高頻度で出題されている.

【13.2.a】

複素平面上において、三角形 ABC の頂点を表す複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  が次の条件を満たす。

$$(A) |\alpha - \beta| = |\beta - \gamma| = |\gamma - \alpha| = \sqrt{3} \quad (B) \alpha + \beta + \gamma = 3 \quad (C) |\alpha\beta\gamma| = 1 \wedge \Im(\alpha\beta\gamma) > 0$$

ただし、 $\Im(z)$  は複素数  $z$  の虚部を表す。

(1)  $z = \alpha - 1$  とするとき、 $\beta, \gamma$  を  $z$  の式で表せ。

(2)  $\alpha, \beta, \gamma$  の偏角を求めよ。ただし、 $0 \leq \arg.\alpha \leq \arg.\beta \leq \arg.\gamma < 2\pi$  とする。

【解答】

(1) 条件 (A) より、

$$AB = BC = CA = \sqrt{3} \quad \dots\dots(2.1)$$

条件 (B) より、

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 1 \quad \dots\dots(2.2)$$

(2.1), (2.2) より正三角形 ABC の重心 G の表す複素数は 1 であり、頂点 B, C は頂点 A を重心 G の周りに  $\pm 2\pi/3$  回転して得られる。

そこで、1 の原始 3 乗根の一方を  $\omega$  として、

$$\begin{aligned} \beta - 1 &= \omega(\alpha - 1) \wedge \gamma - 1 = \bar{\omega}(\alpha - 1) \\ \iff \beta &= \omega z + 1 \wedge \gamma = \bar{\omega} z + 1 \quad \dots\dots(2.3) \end{aligned}$$

(2)  $GA = GB = GC = 1$  (= 外接円の半径) であるから、

$$GA = |\alpha - 1| = |z| = 1 \quad \therefore |z| = 1 \quad \dots\dots(2.4)$$

また、(1) の結果から、

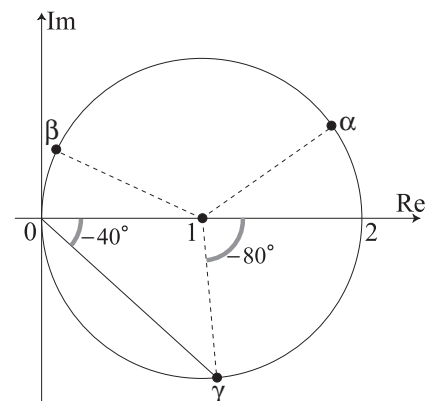
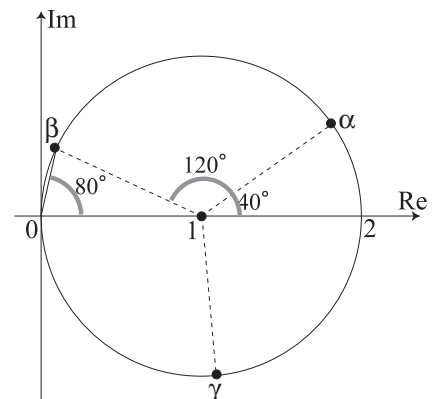
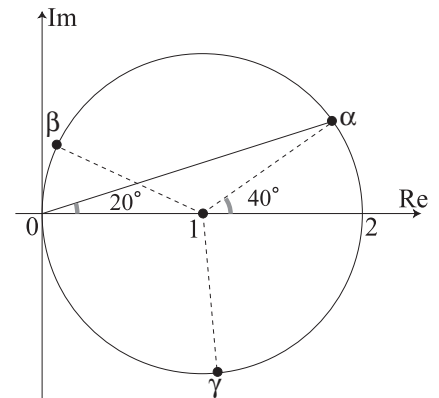
$$\alpha = z + 1, \quad \beta = \omega z + 1, \quad \gamma = \bar{\omega} z + 1 \quad \dots\dots(2.5)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= (z+1)(\omega z+1)(\bar{\omega} z+1) \quad (\because (2.5)) \\ &= \omega\bar{\omega}z^3 + (\omega + \omega\bar{\omega} + \bar{\omega})z^2 + (1 + \omega + \bar{\omega})z + 1 \\ &= z^3 + 1 \quad (\because \omega + \bar{\omega} + 1 = 0) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 + 1 \quad (\because (2.4)) \\ &= (1 + \cos 3\theta) + i\sin 3\theta \quad \dots\dots(2.6) \end{aligned}$$

更に、条件 (C) より、

$$\begin{aligned} (1 + \cos 3\theta)^2 + (\sin 3\theta)^2 &= 1 \wedge \sin 3\theta > 0 \\ \iff \cos 3\theta &= -\frac{1}{2} \wedge \sin 3\theta > 0 \\ \iff 3\theta &\equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi} \\ \iff \theta &\equiv \frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9} \pmod{360^\circ} \quad \dots\dots(2.7) \end{aligned}$$



従って,  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  は集合として

$$\left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}, 1 + \cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9}, 1 + \cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9} \right\} \quad \dots\dots(2.8)$$

と一致する.

更に,  $0 \leq \arg.\alpha \leq \arg.\beta \leq \arg.\gamma < 2\pi$  を考慮して,

$$\arg.\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{9} = \frac{\pi}{9}, \quad \arg.\beta = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi + 6\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}, \quad \arg.\gamma = 2\pi - \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{9} = \frac{16\pi}{9} \quad \dots\dots(2.9)$$

**【13.2.b】**

0 と異なる 3 点  $z_1, z_2, z_3$  があり, 次の条件を満たしている.

- (A)  $\arg z_1 = \arg z_2 + 120^\circ$
- (B) 点  $z_3$  は 2 点  $z_1, z_2$  を通る直線に関して 0 と反対側にある
- (C) 三角形  $z_1 z_2 z_3$  は正三角形である

このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1)  $\alpha = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$  とするとき,

$$\alpha z_1 = p z_1 + q z_2, \quad \alpha z_2 = s z_1 + t z_2$$

を満たす実数  $p, q, s, t$  をそれぞれ  $|z_1|, |z_2|$  を用いて表せ.

- (2)  $z_3 = a z_1 + b z_2$  を満たす実数  $a, b$  をそれぞれ  $|z_1|, |z_2|$  を用いて表せ.

**【解答】**

- (1) 下図において, 点  $\alpha z_1$  は原点 0 に関して点  $z_2$  と反対側にあるので,  $z_1, z_2$  の長さを考慮して,

$$\alpha z_1 = -\frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \iff p = 0 \wedge q = -\frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \dots\dots(2.1)$$

また,  $z_2$  を原点 0 の周りに  $\frac{2\pi}{3}$  回転した点を  $z_2'$  と表せば,

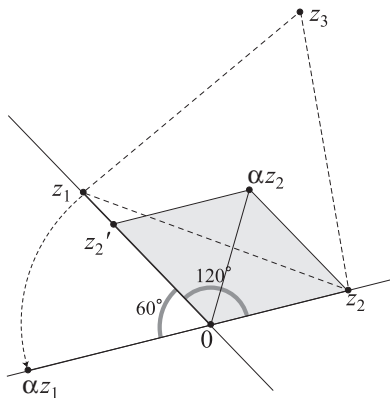
$$z_2' = \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 \quad \dots\dots(2.2)$$

このとき,  $\alpha z_2$  は  $\vec{0z_2}, \vec{0z_2}'$  の張る平行四辺形 (菱形) の対角の頂点であるから,

$$\alpha z_2 = z_2 + z_2' = z_2 + \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 \iff s = \frac{|z_2|}{|z_1|} \wedge t = 1 \quad \dots\dots(2.3)$$

- (2) 三角形  $z_1 z_2 z_3$  が正三角形であるための必要十分条件は,

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= \alpha(z_2 - z_1) \iff z_3 = (1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2 \\ &\iff z_3 = \left(1 + \frac{|z_2|}{|z_1|}\right) z_1 + \left(1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}\right) z_2 \\ &\iff a = 1 + \frac{|z_2|}{|z_1|} \wedge b = 1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \dots\dots(2.4) \end{aligned}$$



**【13.3.a】**

複素平面上の点列  $\{a_n\}$  を次のように定義する.

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = \mathbf{i} & \dots\dots(3.1) \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) & \dots\dots(3.2) \end{cases}$$

また, 数列  $\{b_n\}$  を次のように定義する.

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots(3.3)$$

- (1) 3 点  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) は同一円  $\mathcal{C}$  の周上にあることを示し, その中心と半径を求めよ.  
 (2) すべての点  $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は円  $\mathcal{C}$  の周上にあることを示せ.

**【解答】**

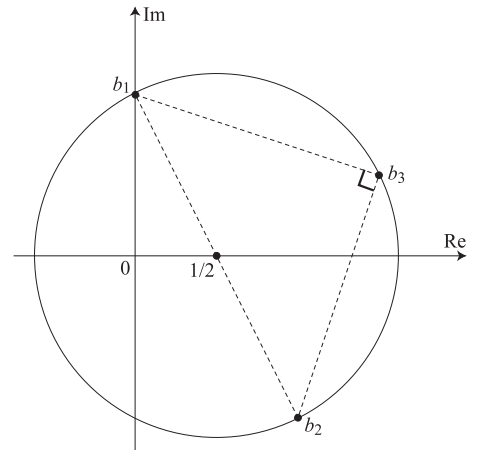
(1) 3 点  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) について,

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = \mathbf{i}, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\mathbf{i}+1}{\mathbf{i}} = 1-\mathbf{i}, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1+2\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \frac{3+\mathbf{i}}{2}$$

より,  $b_3$  を中心に  $b_1$  を正の方向に  $90^\circ$  回転すると  $b_2$  に重なる.

$$\begin{aligned} \therefore (\cos 90^\circ + \mathbf{i} \sin 90^\circ)(b_1 - b_3) &= \mathbf{i} \times \left( \mathbf{i} - \frac{3+\mathbf{i}}{2} \right) \\ &= \frac{-1-3\mathbf{i}}{2} = (1-\mathbf{i}) - \frac{3+\mathbf{i}}{2} = b_2 - b_3 \end{aligned}$$

即ち, 三角形  $b_1b_2b_3$  は  $\overrightarrow{b_1b_2}$  を斜辺とする直角二等辺三角形である.  
 従って, 3 点  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) は, 中心  $\frac{1}{2}$ , 半径  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  の円周上にある.



(2) 漸化式 (3.2) と初期条件 (3.1) により,  $a_n$  の各項の実部と虚部は単調に増加する.  
 従って, 絶対値  $|a_n|$  の値も単調に増加するので,  $a_n \neq 0$  ( $\forall n$ ) が成り立つ.  
 このとき, (3.2) の両辺を  $a_{n+1} (\neq 0)$  で割り,

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \iff b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \quad \left( \wedge b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\forall n) \right) \quad \dots\dots(3.4)$$

となるので, (3.4) で定義される無限個の点  $b_n$  が  $\mathcal{C}$  上に存在することを示せばよい.  
 そこで, 複素平面上の 1 次分数変換

$$w = 1 + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0) \quad \dots\dots(3.5)$$

が円  $\mathcal{C}$  を  $\mathcal{C}$  自身に移すことを示せば証明は完結する.

(3.5) を逆に解き,

$$z = \frac{1}{w-1} \quad (w \neq 1) \quad \dots\dots(3.6)$$

(3.6) を  $\mathcal{C}$  の方程式

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \dots\dots(3.7)$$

に代入して,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{w-1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} &\iff |2-(w-1)| = \sqrt{5}|w-1| \wedge w \neq 1 \\ &\iff (w-3)(\bar{w}-3) = 5(w-1)(\bar{w}-1) \wedge w \neq 1 \iff 4w\bar{w} - 2(w+\bar{w}) = 4 \wedge w \neq 1 \\ &\iff \left( w - \frac{1}{2} \right) \left( \bar{w} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4} \wedge w \neq 1 \iff \left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \wedge w \neq 1 \quad \dots\dots(3.8) \end{aligned}$$

(3.8) は  $w$  が  $\mathcal{C}$  の周上にあることを意味している。即ち、 $\mathcal{C}$  が変換 (3.5) の不動円であることが示せた。  
以上より、 $b_1$  より帰納的にすべての  $b_n$  が  $\mathcal{C}$  の周上に存在する。

[Note] 不動円を用いない (2) の証明;

ある正整数  $n$  に対して、 $b_n$  が  $\mathcal{C}$  上にあると仮定する。即ち、

$$\left| b_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \iff b_n \bar{b}_n - \frac{1}{2}(b_n + \bar{b}_n) - 1 = 0 \quad \dots\dots(3.9)$$

の成立を仮定するとき、

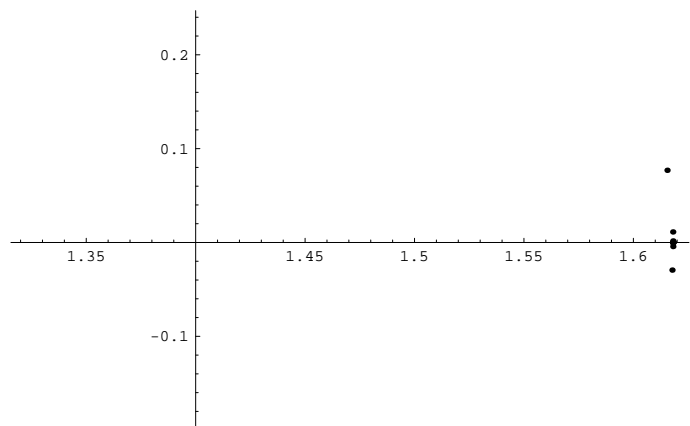
$$\begin{aligned} \left| b_{n+1} - \frac{1}{2} \right|^2 &= \left| \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2} \right|^2 = \left( \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{\bar{b}_n} + \frac{1}{2} \right) \quad (\because (3.4)) \\ &= \frac{b_n \bar{b}_n + 2(b_n + \bar{b}_n) + 4}{4b_n \bar{b}_n} = \frac{b_n \bar{b}_n + 4(b_n \bar{b}_n - 1) + 4}{4b_n \bar{b}_n} = \frac{5}{4} \quad (\because (3.9)) \\ \therefore \left| b_{n+1} - \frac{1}{2} \right| &= \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{(以下略)} \end{aligned}$$

[Note]  $\{b_n\}$  の最初の 10 項  $b_1, b_2, \dots, b_{10}$  のリストと点の分布を出力する。  
点列  $\{b_n\}$  が実軸上のある点に収束する様子が確認できるだろうか?? 即ち、

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots\dots$$

この事実を計算により確認せよ。

- $b_1: 0 + i$
- $b_2: 1 - i$
- $b_3: 1.5 + 0.5i$
- $b_4: 1.6 - 0.2i$
- $b_5: 1.61538 + 0.0769231i$
- $b_6: 1.61765 - 0.0294118i$
- $b_7: 1.61798 + 0.011236i$
- $b_8: 1.61803 - 0.00429185i$
- $b_9: 1.61803 + 0.00163934i$
- $b_{10}: 1.61803 - 0.000626174i$



【13.3.b】

複素平面上の変換

$$w = \frac{1}{z - \alpha} \quad (z \neq \alpha) \quad \dots\dots(3.1)$$

による実軸の像がある直線になるとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha$  の満たすべき条件を求めよ。 (2) この変換による虚軸の像を求めよ。

【解答】

変換 (3.1) を逆に解いて、

$$z = \frac{1}{w} + \alpha \quad (w \neq 0) \quad \dots\dots(3.2)$$

- (1) ある複素数  $z$  が実軸上を動くとき、 $z = \bar{z}$  が成り立つ。

即ち、 $z = \bar{z}$  は実軸の方程式と考えてよく、これを変換 (3.2) で移すと、

$$\frac{1}{w} + \alpha = \frac{1}{\bar{w}} + \bar{\alpha} \iff (\alpha - \bar{\alpha})w\bar{w} - w + \bar{w} = 0 \quad \wedge \quad w \neq 0 \quad \dots\dots(3.3)$$

- (3.3) が直線を表すためには、

$$\alpha - \bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = \bar{\alpha} \iff \alpha \in \mathbb{R} \quad \dots\dots(3.4)$$

であることが必要。このとき、

$$(3.3) \wedge (3.4) \iff w = \bar{w} \quad \wedge \quad w \neq 0 \quad \dots\dots(3.5)$$

即ち、点  $w$  は原点 0 を除く実軸  $w = \bar{w}$  上を動く。

従って、題意成立のための  $\alpha$  の条件は  $\alpha$  : 実数 である。

- (2) ある複素数  $z$  が虚軸上を動くとき、 $z + \bar{z} = 0$  が成り立つ。

即ち、 $z + \bar{z} = 0$  を虚軸の方程式と考えてよく、

- (3.4) の条件の下に、 $z + \bar{z} = 0$  を変換 (3.2) で移すと、

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} + 2\alpha = 0 \quad \wedge \quad w \neq 0 \quad \wedge \quad \alpha \in \mathbb{R} \iff 2\alpha w\bar{w} + w + \bar{w} = 0 \quad \wedge \quad w \neq 0 \quad \wedge \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \dots\dots(3.6)$$

- $\alpha = 0$  の場合; (3.6) は

$$w + \bar{w} = 0 \quad \wedge \quad w \neq 0 \quad \dots\dots(3.7)$$

と同値となり、点  $w$  は原点 0 を除く虚軸上を動く。

- $\alpha \neq 0$  の場合; (3.6) は

$$\begin{aligned} w\bar{w} + \frac{1}{2\alpha}(w + \bar{w}) &= 0 \quad \wedge \quad w \neq 0 \\ \iff \left(w + \frac{1}{2\alpha}\right)\left(\bar{w} + \frac{1}{2\alpha}\right) &= \frac{1}{4\alpha^2} \quad \wedge \quad w \neq 0 \\ \iff \left|w + \frac{1}{2\alpha}\right| &= \frac{1}{2|\alpha|} \quad \wedge \quad w \neq 0 \quad \dots\dots(3.8) \end{aligned}$$

と同値となり、点  $w$  は中心  $-\frac{1}{2\alpha}$ 、半径  $\frac{1}{2|\alpha|}$  の円周上の原点を除く部分を動く。