

【14.1.a】

3 次方程式 $f(x) = 0$ の 3 解を z_1, z_2, z_3 , 2 次方程式 $f'(x) = 0$ の 2 解を w_1, w_2 で表す.
 また, 複素平面上において 3 点 z_1, z_2, z_3 は三角形を構成するものとする.
 2 点 w_1, w_2 が三角形 $z_1z_2z_3$ の内部にあることを既知として, 次の関係が成り立つことを示せ.

$$\angle w_1z_1z_2 = \angle w_2z_1z_3, \quad \angle w_1z_2z_1 = \angle w_2z_2z_3, \quad \angle w_1z_3z_2 = \angle w_2z_3z_1 \quad \dots\dots(1.1)$$

【解答】 等角共役点

題意より,

$$\begin{cases} f(x) = a(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3) & (a \neq 0) \quad \dots\dots(1.2) \\ f'(x) = 3a(x-w_1)(x-w_2) & (a \neq 0) \quad \dots\dots(1.3) \end{cases}$$

ここで, z_1, z_2, z_3 は異なる 3 点を表すので, $w_1 \neq w_2$ である.

(1.2) を x で微分して (1.3) と連立すれば,

$$a(x-z_2)(x-z_3) + a(x-z_1)(x-z_2) + a(x-z_1)(x-z_3) = 3a(x-w_1)(x-w_2) \quad \dots\dots(1.4)$$

(1.4) において $x = z_1$ として,

$$a(z_1-z_2)(z_1-z_3) = 3a(z_1-w_1)(z_1-w_2) \iff \frac{z_3-z_1}{w_2-z_1} = 3 \times \frac{w_1-z_1}{z_2-z_1} \quad \dots\dots(1.5)$$

ここで, $z_1 \neq z_2 \wedge w_2 \neq z_1$ である. ($\because w_2 = z_1$ を仮定すると (1.4) が不合理)

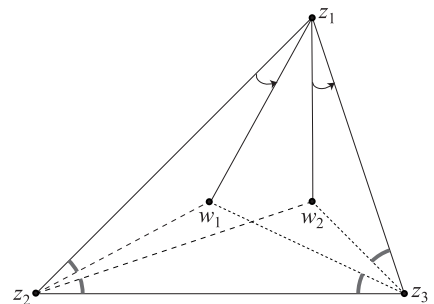
(1.5) 両辺の偏角 (argument) をとり,

$$\begin{aligned} \arg. \frac{z_3-z_1}{w_2-z_1} &\equiv \arg. 3 + \arg. \frac{w_1-z_1}{z_2-z_1} \pmod{2\pi} \iff \arg. \frac{z_3-z_1}{w_2-z_1} \equiv \arg. \frac{w_1-z_1}{z_2-z_1} \pmod{2\pi} \\ &\iff \angle w_1z_1z_2 = \angle w_2z_1z_3 \quad \dots\dots(1.6) \end{aligned}$$

同様にして,

(1.4) に $x = z_2$ を代入して両辺の偏角をとれば, $\angle w_1z_2z_1 = \angle w_2z_2z_3$ が導かれ,

(1.4) に $x = z_3$ を代入して両辺の偏角をとれば, $\angle w_1z_3z_2 = \angle w_2z_3z_1$ が導かれる.



【14.1.b】

四辺形 ABCD に対して、不等式

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD \quad \dots\dots(1.1)$$

が成り立つことを示せ。また、等号の成立条件を調べよ。

【解答】 Ptolemy の定理

四辺形 ABCD を複素平面上で考え、

頂点 A, B, C, D に対応する複素数をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, 0$ とする。

このとき、三角不等式により、

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + BC \cdot DA &= |\beta - \alpha||\gamma| + |\gamma - \beta||\alpha| = |\beta\gamma - \gamma\alpha| + |\gamma\alpha - \alpha\beta| \\ &\geq |\beta\gamma - \gamma\alpha + \gamma\alpha - \alpha\beta| = |\beta\gamma - \alpha\beta| = |\beta||\gamma - \alpha| = AC \cdot BD \\ \therefore AB \cdot CD + BC \cdot DA &\geq AC \cdot BD \quad \dots\dots(1.1) \end{aligned}$$

ここで、(1.1) の等号成立条件は、

$$\begin{aligned} \arg.(\beta\gamma - \gamma\alpha) \equiv \arg.(\gamma\alpha - \alpha\beta) \pmod{2\pi} &\iff \arg.\frac{\gamma}{\alpha} + \arg.\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \equiv \arg.(-1) \pmod{2\pi} \\ &\iff \angle CDA + \angle CBA \equiv \pi \pmod{2\pi} \quad \dots\dots(1.2) \end{aligned}$$

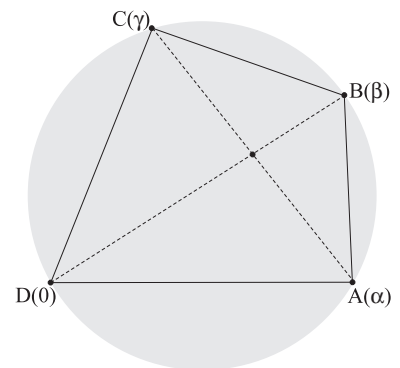
一般に、四辺形の内角の総和は 2π であるから、

$$0 < \angle CDA + \angle ABC < 2\pi \quad \dots\dots(1.3)$$

(1.2), (1.3) により、

$$\angle CDA + \angle ABC = \pi \quad \dots\dots(1.4)$$

従って、(1.1) の等号成立は四角形 ABCD が円に内接するときに限られる。



[Note] 反転の幾何的性質を用いて、不等式 (1.1) の等号を証明する.

複素反転 $w = \frac{1}{z}$ は原点を通る円を原点を通らない直線に移すので、
幾何的反転 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ も原点を通る円を原点を通らない直線に移す.

3点 α, β, γ の $w = \frac{1}{\bar{z}}$ による像の点を

$$\alpha' = \frac{1}{\bar{\alpha}}, \quad \beta' = \frac{1}{\bar{\beta}}, \quad \gamma' = \frac{1}{\bar{\gamma}} \quad \dots\dots(1.5)$$

で表せば、

$$|\alpha'| |\alpha| = |\beta'| |\beta| = |\gamma'| |\gamma| = 1 \iff \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \frac{|\alpha'|}{|\beta'|} \wedge \frac{|\gamma|}{|\beta|} = \frac{|\beta'|}{|\gamma'|} \wedge \frac{|\alpha|}{|\gamma|} = \frac{|\gamma'|}{|\alpha'|} \quad \dots\dots(1.6)$$

が成り立つので、

$$\angle\alpha 0\beta = \angle\alpha' 0\beta', \quad \angle\beta 0\gamma = \angle\beta' 0\gamma', \quad \angle\alpha 0\gamma = \angle\alpha' 0\gamma' \quad \dots\dots(1.7)$$

に注意すれば、3個の三角形 $0\alpha\beta, 0\beta\gamma, 0\gamma\alpha$ は、

それぞれ三角形 $0\alpha'\beta', 0\beta'\gamma', 0\gamma'\alpha'$ と相似である (下図参照).

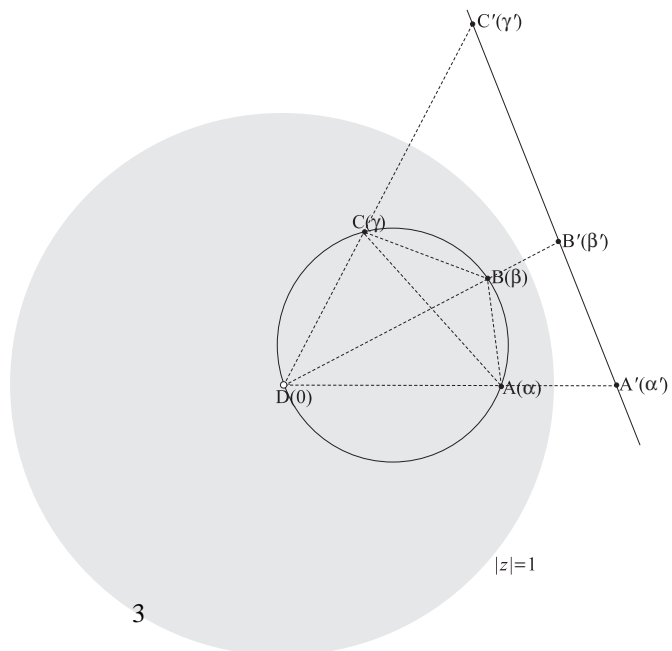
$$\begin{aligned} \therefore \frac{|\beta' - \alpha'|}{|\beta - \alpha|} &= \frac{|\beta'|}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha||\beta|} \wedge \frac{|\gamma' - \beta'|}{|\gamma - \beta|} = \frac{|\gamma'|}{|\beta|} = \frac{1}{|\beta||\gamma|} \wedge \frac{|\alpha' - \gamma'|}{|\alpha - \gamma|} = \frac{|\alpha'|}{|\gamma|} = \frac{1}{|\gamma||\alpha|} \\ \therefore |\beta' - \alpha'| &= \frac{|\beta - \alpha|}{|\alpha||\beta|} \wedge |\gamma' - \beta'| = \frac{|\gamma - \beta|}{|\beta||\gamma|} \wedge |\alpha' - \gamma'| = \frac{|\alpha - \gamma|}{|\gamma||\alpha|} \quad \dots\dots(1.8) \end{aligned}$$

一方、下図において、

$$|\gamma' - \alpha'| = |\beta' - \alpha'| + |\gamma' - \beta'| \quad \dots\dots(1.9)$$

であるから、(1.8), (1.9) により、

$$\begin{aligned} \frac{|\gamma - \alpha|}{|\alpha||\gamma|} &= \frac{|\beta - \alpha|}{|\alpha||\beta|} + \frac{|\gamma - \beta|}{|\beta||\gamma|} \iff |\gamma - \alpha||\beta| = |\beta - \alpha||\gamma| + |\gamma - \beta||\alpha| \\ &\iff AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD \quad \dots\dots(1.10) \end{aligned}$$



【14.2】

(1) 複素平面上的の直線

$$\mathcal{L}: \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = \beta \quad (\beta: \text{実数}) \quad \dots\dots(2.1)$$

に関して対称な2点 w, w' に対して,

$$w' = \gamma\bar{w} + \delta \quad (\gamma, \delta: \text{複素数}) \quad \dots\dots(2.2)$$

を満たす γ, δ を α, β の式で表せ.

(2) 2点 $A(1), B(\sqrt{3}i)$ を通る直線を \mathcal{L} とする.

点 $P(w)$ と直線 \mathcal{L} に関して対称な点 $Q(w')$ に対して,

$$w' = \gamma\bar{w} + \delta \quad (\gamma, \delta: \text{複素数}) \quad \dots\dots(2.3)$$

を満たす複素数 γ, δ を求めよ.

【解答】

(1) 2点 $P(w), Q(w')$ から等距離にある点の集合 (線分 PQ の垂直二等分線) は,

$$\begin{aligned} |w-z| = |w'-z| &\iff (w-z)(\bar{w}-\bar{z}) = (w'-z)(\bar{w}'-\bar{z}) \\ &\iff (\bar{w}-\bar{w}')z + (w-w')\bar{z} = w\bar{w} - w'\bar{w}' \end{aligned} \quad \dots\dots(2.4)$$

(2.4) が直線 \mathcal{L} と一致すればよいので,

$$\begin{cases} \alpha = w - w' & \dots\dots(2.5) \\ \beta = w\bar{w} - w'\bar{w}' & \dots\dots(2.6) \end{cases}$$

(2.5) と (2.6) の共役を (2.6) に代入して,

$$\beta = (\alpha + w')\bar{w} - w'(\bar{w} - \bar{\alpha}) \iff \beta = \alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w' \iff w' = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{w} + \frac{\beta}{\bar{\alpha}} \quad \dots\dots(2.7)$$

(2.7), (2.2) を比較して,

$$\gamma = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \wedge \delta = \frac{\beta}{\bar{\alpha}} \quad \dots\dots(2.8)$$

(2) 直線 $\mathcal{L}: \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = \beta$ が2点 $A(1), B(\sqrt{3}i)$ を通るので,

$$\begin{cases} \bar{\alpha} \cdot 1 + \alpha \cdot 1 = \beta \\ \bar{\alpha} \cdot \sqrt{3}i + \alpha(-\sqrt{3}i) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{\alpha} + \alpha = \beta \\ \bar{\alpha} - \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{3}i} \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{\alpha} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} \beta & \dots\dots(2.9) \\ \alpha = -\frac{1 - \sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} \beta & \dots\dots(2.10) \end{cases}$$

(2.9), (2.10) を γ, δ に代入して,

$$\gamma = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \wedge \delta = \frac{\beta}{\bar{\alpha}} = \frac{2\sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i) \quad \dots\dots(2.11)$$

【14.3】

複素平面上の変換 $T : w = \frac{1}{z}$ に関して、次の各問いに答えよ.

- (1) T によって単位円 $|z| = 1$ 上の任意の点はその点自身に移ることを示せ.
 - (2) T によって原点を通る任意の直線はその直線自身に移ることを示せ.
 - (3) T によって原点を通らない任意の円は、原点を通らないある円に移ることを示せ.
 - (4) T によって単位円 $|z| = 1$ と直交する原点を通らない任意の円は、その円自身に移ることを示せ.
- ただし、2円が直交するとは、2円の交点においてそれぞれの円の接線が直交することである.

【解答】 幾何的反転

- (1) 単位円 $|z| = 1$ 上の点 z に対して、

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} z \iff w = z \quad \dots\dots(3.1)$$

即ち、単位円 $|z| = 1$ 上の任意の点是不動点であり、単位円 $|z| = 1$ は変換 T による不動円である.

- (2) 実軸を x 、虚軸を y として、原点を通る任意の直線は、

$$ax + by = 0 \wedge (a, b) \neq (0, 0) \wedge a, b : \text{実数} \quad \dots\dots(3.2)$$

と表せる. ここで、 $z = x + iy$ と書けば、

$$\begin{aligned} ax + by = 0 &\iff a \times \frac{z + \bar{z}}{2} + b \times \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0 \\ &\iff (ai + b)z + (ai - b)\bar{z} = 0 \iff (a - bi)z + (a + bi)\bar{z} = 0 \\ &\iff \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 0 \wedge \alpha = a + bi \quad \dots\dots(3.3) \end{aligned}$$

- (3.3) において、 $z = 1/\bar{w}$ とすれば、

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 0 \wedge z \neq 0 \iff \bar{\alpha} \times \frac{1}{\bar{w}} + \alpha \times \frac{1}{w} = 0 \iff \bar{\alpha}w + \alpha\bar{w} = 0 \wedge w \neq 0 \quad \dots\dots(3.4)$$

(3.3), (3.4) は同一直線であるから、(3.2) は不動直線である. ただし、原点は除外点として扱う.

(3) 中心 α , 半径 $r (> 0)$ の円は $|z - \alpha| = r$ と表され, 題意の円は原点を通らないので, $|\alpha| \neq r$ が成り立つ. このとき, $|z - \alpha| = r$ において, $z = 1/\bar{w}$ とすれば,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\bar{w}} - \alpha\right)\left(\frac{1}{w} - \bar{\alpha}\right) = r^2 &\iff (\alpha\bar{w} - 1)(\bar{\alpha}w - 1) = r^2 w\bar{w} \\ &\iff (|\alpha|^2 - r^2)w\bar{w} - \alpha\bar{w} - \bar{\alpha}w + 1 = 0 \\ &\iff w\bar{w} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\bar{w} - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}w + \frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} = 0 \quad (\because |\alpha| \neq r) \\ &\iff \left(w - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right)\left(\bar{w} - \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right) = \frac{r^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} \\ &\iff \left|w - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right| = \frac{r}{\left||\alpha|^2 - r^2\right|} \quad \dots\dots(3.5) \end{aligned}$$

(3.5) において,

$$\frac{|\alpha|}{\left||\alpha|^2 - r^2\right|} \neq \frac{r}{\left||\alpha|^2 - r^2\right|} \quad (\because |\alpha| \neq r) \quad \dots\dots(3.6)$$

であるから, (3.5) は中心 $\frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}$, 半径 $\frac{r}{\left||\alpha|^2 - r^2\right|}$ の円であり, 原点を通らない.

従って, 変換 T は原点を通らない円を原点を通らない円に移す.

(4) 下図の様に単位円 $|z| = 1$ と直交する円 \mathcal{C} に対して,

原点から 2 接線 g, g' を引けば, その接点 T, T' は単位円との交点に一致する. この接点 T, T' は単位円周上にあるので, (1) により変換 T により不動である. 更に (2) により, その接線 g, g' も不動である. また (3) により, \mathcal{C} は原点を通らない円なので, \mathcal{C} の像も原点を通らない円である. 即ち, 円 \mathcal{C} の変換 T による像の円 \mathcal{C}_T は,

$$\text{原点を通らない円であり, 2 直線 } g, g' \text{ を接線とし, その接点が } T, T' \text{ である} \quad \dots\dots(3.7)$$

から \mathcal{C} 自身である. 即ち, \mathcal{C} は不動円である.

