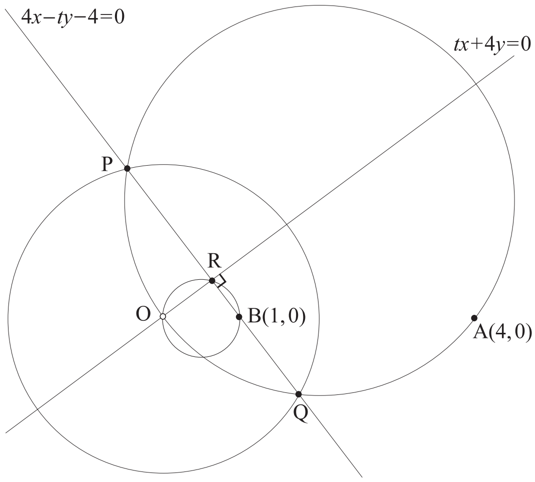
【15.1】

平面上の原点 O と点 A(4, 0) を通る円 $\mathfrak{C}$ が円 $x^2+y^2=4$ と異なる 2 点 P, Q において交わっている．$\mathfrak{C}$ を変化させるとき，線分 PQ の中点 R の描く軌跡を求めよ．

【解答】



O を通る円 $x^2+y^2+ax+by=0$ が A(4, 0) を通るとき，

$$16+4a=0 \iff a=-4$$

従って，$\mathfrak{C}$ の方程式は実数 t を媒介変数として，

$$x^2+y^2-4x+ty=0 \quad (-\infty<t<\infty) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

と表せる．

このとき，(1.1) と $x^2+y^2=4$ の共通弦を含む直線は，

$$\lambda(x^2+y^2-4x+ty)+\mu(x^2+y^2-4)=0$$

において，$\lambda=-1,\ \mu=1$ として，

$$4x-ty-4=0 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

題意の点 R は，原点を通り，(1.2) に直交する直線 $tx+4y=0$ と (1.2) との交点と考えられる．

即ち，以下の連立方程式の解である．

$$\begin{cases} 4x-ty-4=0 & \cdots\cdots(1.2) \\ tx+4y=0 & \cdots\cdots(1.3) \end{cases}$$

$x\neq 0$ のとき (1.3) は，

$$t=-\frac{4y}{x} \ (x\neq 0) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.4) を (1.2) に代入して，

$$4x-\left(-\frac{4y}{x}\right)y-4=0 \iff x^2+y^2-x=0 \ \land \ x\neq 0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \ \land \ x\neq 0 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

ここで，(1.2) は如何なる実数 t に対しても原点を通り得ないので，**原点は除外点として除かれる**．

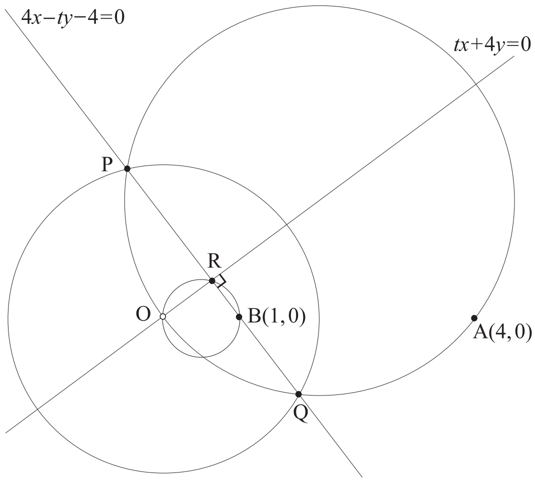
従って，R の軌跡は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \ \land \ (x,\ y)\neq(0,\ 0) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

【別解】　– 初等幾何的解法 –

(1.2) は任意の実数 t に対して，常に $\mathrm{B}(1,\ 0)$ を通る．また，**下図**において，t の値に無関係に常に $\angle\mathrm{ORB}=90^\circ$ が成り立つ．即ち，R は 2 定点 O, B から見込む角が常に 90° を保って移動するので，その軌跡は OB を直径とする円弧である．ただし，(1.2) は如何なる実数 t に対しても x 軸とは一致しないので，$\mathrm{R}\neq\mathrm{O}$ である．

$$\therefore\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\ \wedge\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)$$



【15.2】

$k>0$ とする．

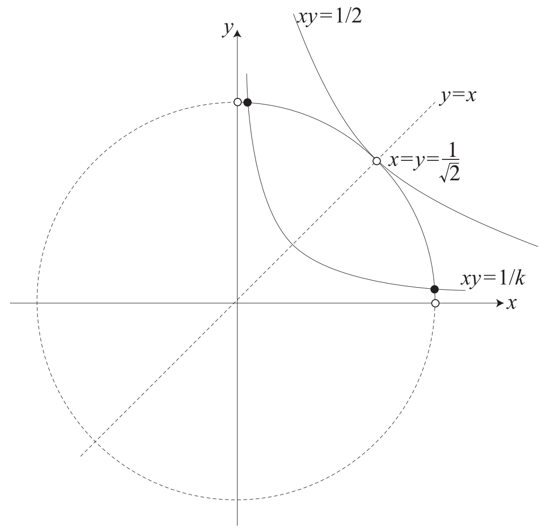
xy 平面上の 2 曲線

$$\begin{cases} y=k(x-x^3) & \cdots\cdots(2.1) \\ x=k(y-y^3) & \cdots\cdots(2.2) \end{cases}$$

が第 1 象限に $x\neq y$ なる交点 $(x,\ y)$ を持つような k の値の範囲を求めよ．

【解答】

連立方程式 (2.1), (2.2) の辺々を加えて，



$$x+y=k(x+y-(x^3+y^3)) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

ここで，交点 $(x,\ y)$ は $x>0\wedge y>0$ を満たすので，

$x+y>0$ で割ることができ，更に，$k>0$ であるから，

$$x^2-xy+y^2=1-\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

この曲線 (2.4) は (2.1), (2.2) の交点を通る．

次に，(2.1), (2.2) の辺々を減じて，

$$y-x=k(x-y-(x^3-y^3)) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

ここで，交点 $(x,\ y)$ は $x\neq y$ を満たすので，

$x-y\neq 0$ で割ることができ，更に，$k>0$ であるから，

$$x^2+xy+y^2=1+\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

この曲線 (2.6) も (2.1), (2.2) の交点を通る．即ち，

$$(2.1)\wedge(2.2)\wedge x>0\wedge y>0\wedge x\neq y\wedge k>0 \iff (2.4)\wedge(2.6)\wedge x>0\wedge y>0\wedge x\neq y\wedge k>0$$

従って，(2.1), (2.2) の交点は (2.4), (2.6) の交点と一致する．

以下，この論法を繰り返す．

(2.4) + (2.6) より，

$$x^2+y^2=1 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.4) − (2.6) より，

$$xy=\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

従って，(2.1), (2.2) の交点は (2.7), (2.8) の交点と一致するので，**上図**より，

単位円 (2.7) と双曲線 (2.8) が第 1 象限において直線 $y=x$ 上にない交点を持つための $k>0$ の値の範囲は，

$$\frac{1}{k}<\frac{1}{2} \iff k>2 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

[Note]　連立方程式

$$\begin{cases} u(x,\,y)=0 & \cdots\cdots(1) \\ v(x,\,y)=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

の解を解とする方程式

$$\lambda\,u(x,\,y)+\mu\,v(x,\,y)=0 \quad (\forall\lambda,\ \forall\mu) \qquad \cdots\cdots(3)$$

に対して,

$$\lambda=\mu=1\ \lor\ \lambda=-\mu=1 \qquad \cdots\cdots(4)$$

として得られる連立方程式

$$\begin{cases} U(x,\,y)=0 & \cdots\cdots(5) \\ V(x,\,y)=0 & \cdots\cdots(6) \end{cases}$$

の解として $(1)\land(2)$ の解を考えることができる.
このような共通解に関する同値変形を繰り返し, $(2.1)\land(2.2)$ の解を $(2.7)\land(2.8)$ の解と考えることで, 2 図形の共有点をより単純な 2 図形の共有点に置き換えて議論している. このような処理は 1 変数の方程式では頻繁に行われる. 以下の例題で確認せよ.

【Example】　2000 大阪市大

定数 $a>0,\ b>0$ に対して,

$$\begin{cases} x^2-2ax-b=0 & \cdots\cdots(1) \\ x^3-(2a^2+b)x-4ab=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

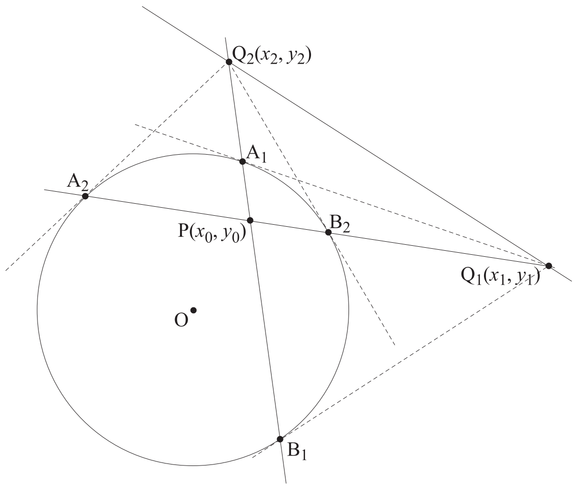
を考えるとき, 2 次方程式 (1) の解の内の 1 個だけが 3 次方程式 (2) の解となるための必要十分条件を求めよ. また, その共通解を a を用いて表せ.

必要十分条件: $b=3a^2$, **共通解**: $3a$

【15.3】

原点 O を中心とする半径 $a>0$ の円に対して，円の外部の点 Q_1 から 2 本の接線を引き，接点をそれぞれ A_1, B_1 とする．更に，直線 A_1B_1 上の点で円の外部にある点 Q_2 をとる．点 Q_2 からこの円に引いた 2 本の接線の接点をそれぞれ A_2, B_2 とするとき，直線 A_2B_2 は点 Q_1 を通ることを示せ．次に，2 直線 A_1B_1, A_2B_2 の交点を $P(x_0,\ y_0)$ とするとき，2 点 Q_1, Q_2 を通る直線は方程式 $x_0x+y_0y=a^2$ で与えられることを示せ．

【解答】



$Q_1(x_1,\ y_1)$ を極とする円

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

の極線 A_1B_1 の方程式は，

$$x_1x+y_1y=a^2 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

$Q_2(x_2,\ y_2)$ を極とする (3.1) の極線 A_2B_2 の方程式は，

$$x_2x+y_2y=a^2 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

一方，$Q_2(x_2,\ y_2)$ は極線 (3.2) 上にあるので，

$$x_1x_2+y_1y_2=a^2 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

が成り立ち，(3.4) の成立は極線 (3.3) が点 $Q_1(x_1,\ y_1)$ を通ることを意味する．
次に，(3.2), (3.3) の交点が $P(x_0,\ y_0)$ であるから，

$$\begin{cases} x_1x_0+y_1y_0=a^2 & \cdots\cdots(3.5) \\ x_2x_0+y_2y_0=a^2 & \cdots\cdots(3.6) \end{cases}$$

が同時に成り立ち，直線 $x_0x+y_0y=a^2$ が Q_1, Q_2 を同時に通ることを意味する．

– 極と極線 –

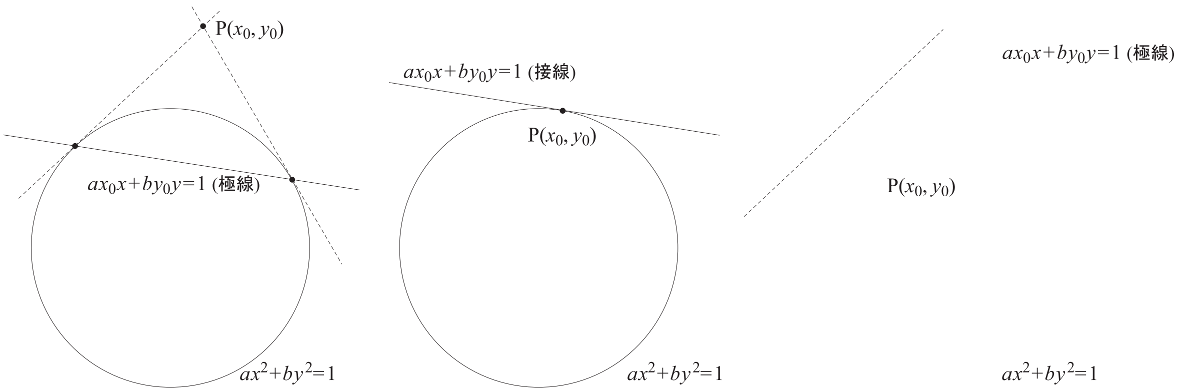
一般に，円，楕円，双曲線等の二次曲線

$$ax^2+by^2=1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

に対して，

$$ax_0x+by_0y=1 \qquad \cdots\cdots(2)$$

で与えられる直線を点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を**極**とする**極線**という．
直線 (2) は，$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ と曲線 (1) との位置関係により，次の三通りに分類される．
(図は円の場合であるが，他の二次曲線も同様である)



ただし，放物線 $x^2=4py$ の場合，$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を極とする極線は，

$$x_0x=2p(y+y_0) \qquad \cdots\cdots(3)$$

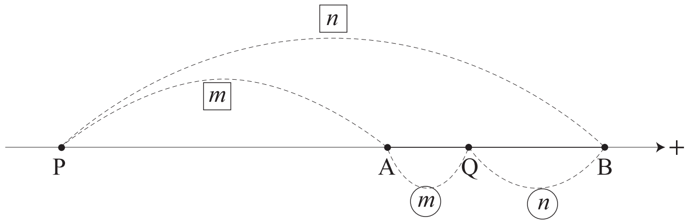
– 調和共役点 –

2 点 P, Q の**有向線分長**を $\overline{\mathrm{PQ}}$ で表すとき，線分 AB に対して，2 点 P, Q が

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=-\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{BQ}}} \iff \overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=-\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}} \qquad \cdots\cdots(4)$$

を満たすとき，2 点 P, Q は線分 AB を**調和に分ける**といい，P, Q を A, B の**調和共役点**という．

二次曲線 $\mathfrak{C}$ に対して，$\mathfrak{C}$ 上にない点 P を通る割線 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{C}$ との 2 交点を A, B とするとき，
AB に関する P の調和共役点 Q の軌跡はある直線 $\mathfrak{L}$ を描く．この $\mathfrak{L}$ が P を極とする $\mathfrak{C}$ の極線である．



【15.4】

$a>0$ とする．

直線 $y=-\dfrac{1}{4a}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ -\dfrac{1}{4a}\right)$ から放物線 $y=ax^2$ に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}(q,\ aq^2)$, $\mathrm{R}(r,\ ar^2)$ とする．また，Q, R における 2 本の法線の交点を S とする．P が直線上を移動するとき，S の軌跡の方程式を求めよ．更に，S の描く軌跡を $\mathfrak{C}$ として，S における $\mathfrak{C}$ の接線と x 軸との交点を T とする．$p>0$ のとき，2 点 P, T の距離を最小にする P の座標を求めよ．

【解答】

Q, R における放物線の接線は次式で与えられる．

$$\begin{cases} y=2aqx-aq^2 & \cdots\cdots(4.1) \\ y=2arx-ar^2 & \cdots\cdots(4.2) \end{cases}$$

この 2 接線の交点の座標は，$\left(\dfrac{q+r}{2},\ aqr\right)$ であり，これが $\mathrm{P}\left(p,\ -\dfrac{1}{4a}\right)$ に一致するので，

$$q+r=2p\ \wedge\ qr=-\frac{1}{4a^2} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.3) の第 2 式より，

$$2aq\times 2ar=-1 \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

即ち，Q, R における 2 接線は交点 P において直交する．

このとき，Q, R における 2 接線と 2 法線の囲む四角形 PQSR は長方形となり，

その対角線 PS, QR は各々の中点で交わるので，S の座標を $(x',\ y')$ と置けば，

$$\frac{x'+p}{2}=\frac{q+r}{2}\ \wedge\ \frac{1}{2}\left(y'-\frac{1}{4a}\right)=\frac{aq^2+ar^2}{2} \iff x'=q+r-p\ \wedge\ y'=a(q^2+r^2)+\frac{1}{4a} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

(4.5) に (4.3) を代入して，

$$x'=p\ \wedge\ y'=4ap^2+\frac{3}{4a} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(4.6) の 2 式から p を消去して，

$$y'=4a(x')^2+\frac{3}{4a} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

題意より，p は実数全体を動くので，求める軌跡は，

$$\mathfrak{C}: y=4ax^2+\frac{3}{4a} \quad (-\infty<x<\infty) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

次に，S における $\mathfrak{C}$ の接線は，

$$y=8ap(x-p)+4ap^2+\frac{3}{4a} \iff y=8apx-4ap^2+\frac{3}{4a} \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

(4.9) と x 軸との交点 T の座標は，$\left(\dfrac{p}{2}-\dfrac{3}{32a^2p},\ 0\right)$ であるから，

$$\mathrm{PT}^2=\left(\frac{p}{2}+\frac{3}{32a^2p}\right)^2+\frac{1}{16a^2}\geq\frac{3}{16a^2}+\frac{1}{16a^2}=\frac{1}{4a^2} \quad (\because\ p>0) \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.10) の等号条件は，$\dfrac{p}{2}=\dfrac{3}{32a^2p}$ であるから，$p=\dfrac{\sqrt{3}}{4a}>0$ のとき，PT は最小となる．

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{4a},-\frac{1}{4a}\right) \qquad \cdots\cdots(4.11)$$