【16.1】

平面上に 3 円 $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ があり，$\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ は異なる 2 点 A, B で交わり，$\mathfrak{C}_3$ は $\mathfrak{C}_1$ および $\mathfrak{C}_2$ と直交している．ここで，2 円が直交するとは，2 円が共有点を持ち，各共有点における 2 円の接線が直交することをいう．

(1) $\mathfrak{C}_3$ の中心は，A, B を通る直線上にあることを示せ．

(2) A, B の一方は $\mathfrak{C}_3$ の内部にあり，他方は $\mathfrak{C}_3$ の外部にあることを示せ．

【解説】　– 方冪 –

$\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ は $\mathfrak{C}_3$ と互いに直交するので，$\mathfrak{C}_3$ との交点をそれぞれ P_1, P_2 とすれば，P_1 における $\mathfrak{C}_1$ の接線は $\mathfrak{C}_3$ の中心 O を通り，P_2 における $\mathfrak{C}_2$ の接線も $\mathfrak{C}_3$ の中心 O を通る．このとき，

$$\mathrm{OP}_1 = \mathrm{OP}_2 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

一方，O に関する $\mathfrak{C}_1$ の方冪について，

$$\mathrm{OP}_1{}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}_1} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

同様に，O に関する $\mathfrak{C}_2$ の方冪について，

$$\mathrm{OP}_2{}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}_2} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

ここで，B_1, B_2 は O から A に引いた直線と $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ との交点である．このとき，(1.1), (1.2), (1.3) により，

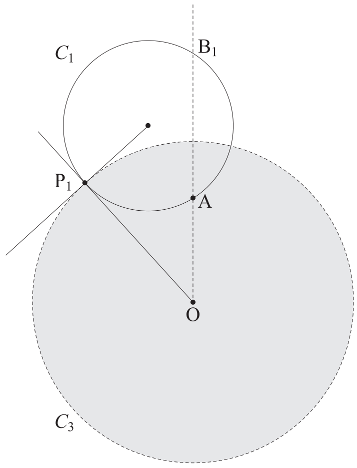
$$\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}_1} = \mathrm{OP}_1{}^2 = \mathrm{OP}_2{}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}_2}$$

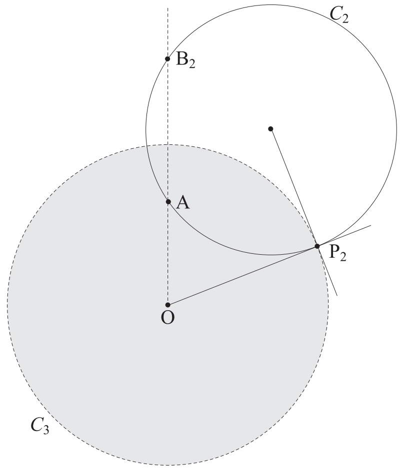
$$\iff \overline{\mathrm{OB}_1} = \overline{\mathrm{OB}_2} \iff \mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2\ (= \mathrm{B}) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

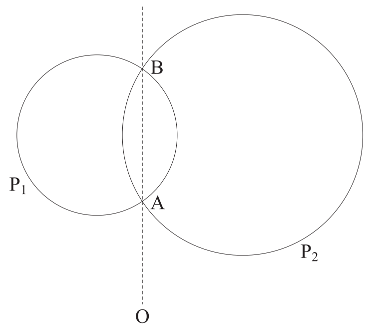
(1.4) より，A, B を通る直線 (**根軸**) は $\mathfrak{C}_3$ の中心 O を通り，
更に，$\mathrm{OP}_1 = \mathrm{OP}_2 = r > 0$ と置けば，

$$r^2 = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}} \ \wedge\ \mathrm{A} \neq \mathrm{B} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

より，A, B の一方は $\mathfrak{C}_3$ の内側に，他方は $\mathfrak{C}_3$ の外側に存在する．

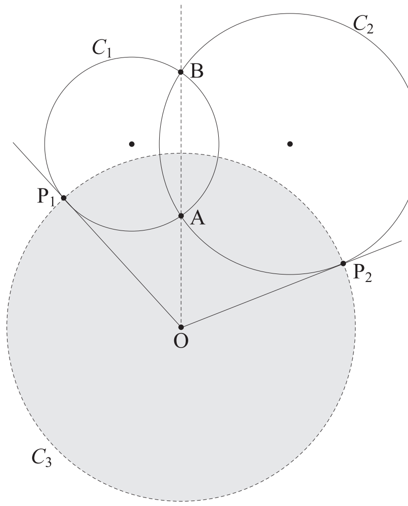






【別解】

(1) 一般に，2 円が直交するとき，共有点における 2 円の接線が互いに他の円の中心を通ることに注意する．即ち，$\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3$ の共有点 P_1 における $\mathfrak{C}_1$ の接線は $\mathfrak{C}_3$ の中心 O を通り，$\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ の共有点 P_2 における $\mathfrak{C}_2$ の接線も $\mathfrak{C}_3$ の中心 O を通る．



そこで，O を原点とする座標平面において，

$$\mathfrak{C}_1 : x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots\cdots(1.6)$$
$$\mathfrak{C}_2 : x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots\cdots(1.7)$$

と置き，更に，接線 OP_1 の方程式を t を媒介変数として，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

と表せば，(1.6), (1.8) の接点 P_1 は t の方程式

$$(t\cos\theta)^2+(t\sin\theta)^2+a_1t\cos\theta+b_1t\sin\theta+c_1=0 \iff t^2+(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)t+c_1=0 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

の重根である．

その重根を $t=\tau_1$ と書けば，(1.9) における**解と係数の関係**から，

$$\tau_1{}^2=c_1 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

一方，$\overrightarrow{OP_1}$ の長さに関して，

$$\left|\overrightarrow{OP_1}\right|^2=\tau_1{}^2\left|\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\right|^2=\tau_1{}^2 \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

と表されるので，(1.10), (1.11) により，

$$OP_1{}^2=c_1 \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

同様にして，

$$OP_2{}^2=c_2 \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

も導けるので，(1.12), (1.13) により，

$$c_1=c_2 \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

このとき，(1.6), (1.7) より得られる方程式

$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y=0 \quad \left(\because\ c_1=c_2\right) \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

は $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ の交点 A, B を通る直線 (**根軸**) を表すので，直線 AB は $\mathfrak{C}_3$ の中心 O を通る．

(2) (1) の結果と**方冪の定理**により，

$$OA\times OB=(OP_1)^2=(\mathfrak{C}_3\text{の半径})^2 \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

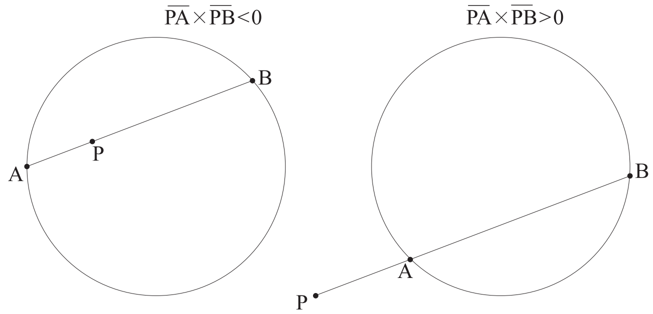
が成り立つので，A, B の一方は $\mathfrak{C}_3$ の内部に，他方は $\mathfrak{C}_3$ の外部に存在する．

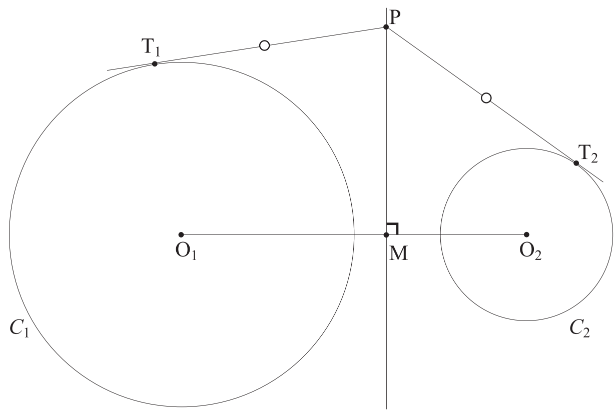
– 根軸 –

円 $\mathfrak{C}$ の内点または外点 P を通る $\mathfrak{C}$ の割線と $\mathfrak{C}$ との交点を A, B とするとき，
有向線分長 (符号付き長さ) の積 $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}}$ の値を $\mathfrak{C}$ に対する P の**方冪**という．
更に，2 円 $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ への方冪を等しく保つ点の軌跡の直線を $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ の**根軸**という．
一般に，同心 2 円に根軸は存在せず，2 円の中心が異なるとき，根軸は以下の性質を持つ．
(1) 2 円の中心を結ぶ線分 $\mathrm{O_1O_2}$ 上にあり，半径を r_1, r_2 とすると，

$$\mathrm{O_1M}^2 - {r_1}^2 = \mathrm{O_2M}^2 - {r_2}^2$$

を満たす点 M において，線分 $\mathrm{O_1O_2}$ に垂直な直線である．
(2) 2 円に引いた接線の長さが等しい点の軌跡を含む．
(3) 2 円が 2 点で交わるとき，その共通弦を含む．
(4) 2 円が 1 点で接するとき，その共通接線と一致する．
(5) 2 円の共通外接線のなす角を等分し，共通内接線のなす角も等分する．





【16.2】

xy 平面上において次の条件を満たす点 (x, y) の存在範囲を $\mathfrak{D}$ とする.

$$\log_2 x \leq 2+\log_2 y \leq \log_2 x+\log_2(4-2x) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(1) xy 平面上に領域 $\mathfrak{D}$ を図示せよ.

(2) $s<1$ のとき, $y-sx$ の $\mathfrak{D}$ 上での最大値 $f(s)$ を求め, 関数 $t=f(s)$ のグラフを st 平面上に図示せよ.

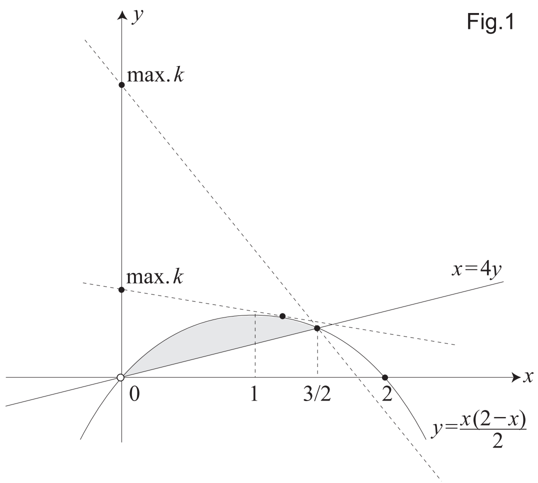
【解答】

(1) 真数条件を考慮して (2.1) を同値変形すれば,

$$\log_2\frac{x}{4} \leq \log_2 y \leq \log_2\frac{x(4-2x)}{4} \ \wedge\ x>0 \ \wedge\ y>0 \ \wedge\ 4-2x>0$$

$$\iff \frac{x}{4} \leq y \leq \frac{x(2-x)}{2} \ \wedge\ y>0 \ \wedge\ 0<x<2 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) により, Fig.1 を得る.



(2) $y-sx=k\,(s<1)$ と置く.

領域 $\mathfrak{D}$ の境界の放物線の端点 $x=0,\ x=\dfrac{3}{2}$ における放物線の接線の傾きは,

$$y'_{x=0}=1, \quad y'_{x=\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$$

そこで, 直線 $y=sx+k$ の傾き s の値を以下の二通りの範囲に分類して k の最大値を調べる.

● $-\dfrac{1}{2} \leq s < 1$ の場合;

$\mathfrak{D}$ と $y=sx+k$ が共有点を持つときの k の最大値は, 直線が $\mathfrak{D}$ の境界の放物線と接するときであるから, 接点の x 座標を x_0 で表すと,

$$\left(y'_{x=x_0}=\right)1-x_0=s \qquad \therefore\ x_0=1-s$$

このとき, 接点の y 座標 y_0 は,

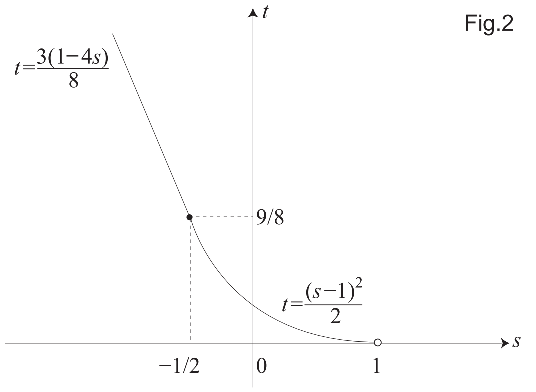
$$y_0=(1-s)-\frac{1}{2}(1-s)^2$$

$$\therefore\ \max.k=y_0-sx_0=\frac{1}{2}(s-1)^2 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

● $s<-\dfrac{1}{2}$ の場合;

直線が $\mathfrak{D}$ の端点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{8}\right)$ を通るときに k は最大となる.

$$\therefore\ \max.k=\frac{3}{8}-\frac{3}{2}s \qquad \cdots\cdots(2.4)$$



(2.3), (2.4) により,

$$f(s)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(s-1)^2 & \left(-\dfrac{1}{2} \leq s < 1\right) \\ -\dfrac{3}{2}s+\dfrac{3}{8} & \left(s<-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

これを st 平面上に図示して Fig.2 を得る.

【16.3】

xy 平面上において，放物線 $y=x^2$ $(x>0)$ 上に中心を持ち，x 軸に接する円が通過する領域を図示せよ．

【解答】

題意の円の中心の x 座標を $t>0$ と置けば，その方程式は

$$(x-t)^2+(y-t^2)^2=t^4 \quad (t>0) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

と表され，(3.1) を t の 2 次方程式

$$(1-2y)t^2-2xt+x^2+y^2=0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

として，(3.2) が $t>0$ の範囲に少なくとも 1 個の解を持つための x, y に関する条件を求める．

- $1-2y=0$ の場合;

$$(3.2) \wedge y=\frac{1}{2} \iff -2xt+x^2+\frac{1}{4}=0 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) は $x \neq 0$ の条件の下で，

$$t=\frac{x^2+1/4}{2x}\ (>0) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

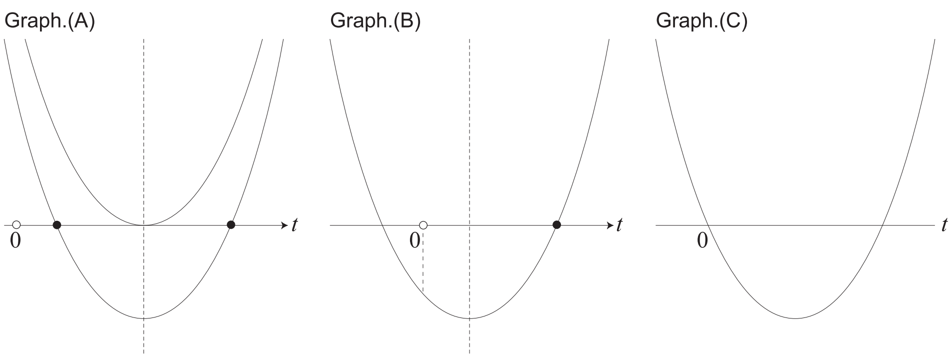
と解け，この解 t に対して $x>0$ が求める条件である．

$$\therefore\ y=\frac{1}{2} \wedge x>0 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

- $1-2y \neq 0$ の場合;

$$(3.2) \wedge 1-2y\neq 0 \iff t^2-\frac{2x}{1-2y}t+\frac{x^2+y^2}{1-2y}=0 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) 左辺の 2 次関数を $u(t)$ と置き，$u(t)$ のグラフを調べることで，
(3.6) が $t>0$ の範囲に少なくとも 1 個の解を持つための条件を求める．



(A) $t>0$ の範囲に (重複解を含む)2 個の解を持つ場合;

$$\mathrm{D}\geq 0\ (\textbf{判別式}) \wedge \frac{x}{1-2y}>0\ (\textbf{対称軸}) \wedge u(0)>0\ (\textbf{端点の座標})$$

$$\iff x^2-(1-2y)(x^2+y^2)\geq 0 \wedge x(1-2y)>0 \wedge \frac{x^2+y^2}{1-2y}>0$$

$$\iff y\left(x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)\geq 0 \wedge x>0 \wedge 1-2y>0 \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

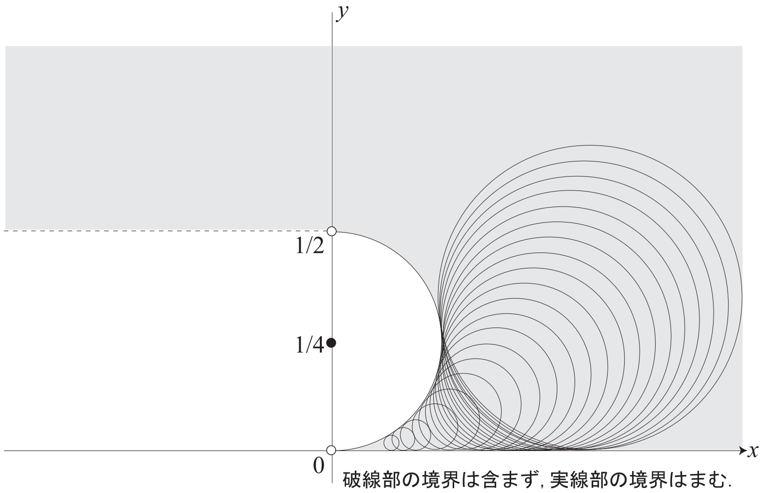
(B) $t>0$ の範囲に 1 個, $t<0$ の範囲に 1 個の解を持つ場合;

$$u(0)<0 \iff \frac{x^2+y^2}{1-2y}<0 \iff 1-2y<0 \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

(C) $t>0$ の範囲に 1 個, 他が $t=0$ の解を持つ場合;

$$u(0)=0 \ \wedge \ (t=)\ \frac{2x}{1-2y}>0 \iff \frac{x^2+y^2}{1-2y}=0 \ \wedge \ \frac{x}{1-2y}>0$$
$$\iff (x,\ y)=(0,\ 0) \ \wedge \ x(1-2y)>0 \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

ここで, (3.9) は同時には成り立たないので (C) の場合は起こらない.
以上, (3.5), (3.7), (3.8) をまとめて以下の図を得る.



破線部の境界は含まず, 実線部の境界はまむ.

【16.4】

平面上の 4 点

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \ \mathrm{B}(-1,\ 0),\ \ \mathrm{C}(a,\ b),\ \ \mathrm{D}\left(-\frac{a}{a^2+b^2},\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)\quad (b>0)$$

に対して，次の問いに答えよ．

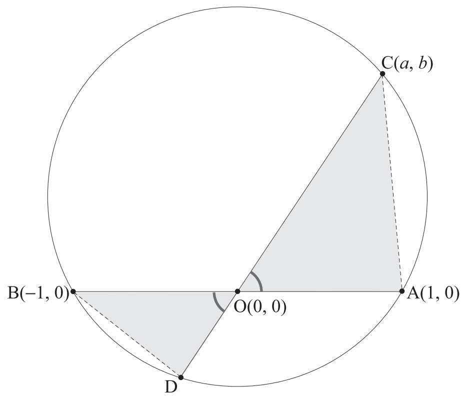
(1) 4 点は同一円周上にあることを示し，その円の方程式を求めよ．

(2) $a=2,\ b=1$ として，点 P が (1) の円周上を動くとき，

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2+\mathrm{PD}^2$$

の最大値と最小値を求めよ．

【解答】



(1) 3 点 A, O, B は共線であり，3 点 C, O, D も共線である．更に，

$$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=1\times(-1)=-1$$
$$\land\ \ \overline{\mathrm{OC}}\times\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{a^2+b^2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=-1\quad\cdots\cdots(4.1)$$

より，**方幂の定理の逆**が成り立ち，A, B, C, D は共円である．

この共円の方程式を $x^2+y^2+px+qy+r=0$ と表し，

通過点の座標 A(1, 0), B(−1, 0), C(a, b) を代入して，

$$\left\{\begin{aligned} 1+p+r&=0\\ 1-p+r&=0\\ a^2+b^2+pa+bq+r&=0\end{aligned}\right. \iff p=0\ \land\ q=\frac{1-a^2-b^2}{b}\ \land\ r=-1\qquad\cdots\cdots(4.2)$$

従って，題意の円の方程式は，

$$x^2+y^2-\frac{a^2+b^2-1}{b}y-1=0\iff x^2+\left(y-\frac{a^2+b^2-1}{2b}\right)^2=1+\frac{(a^2+b^2-1)^2}{4b^2}\qquad\cdots\cdots(4.3)$$

(2) $a=2,\ b=1$ のとき，四角形 ACBD の重心 G の座標は，

$$\frac{1}{4}\left(1-1+2-\frac{2}{5},\ 0+0+1-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right)\ (=\mathrm{G})\qquad\cdots\cdots(4.4)$$

更に，四角形 ACBD の外接円の方程式は，

$$x^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2\qquad\cdots\cdots(4.5)$$

このとき，Lagrange **の恒等式**より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2+\mathrm{PD}^2&=\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2+\mathrm{GD}^2+4\mathrm{GP}^2\\ &=\frac{10}{25}+\frac{50}{25}+\frac{80}{25}+\frac{20}{25}+4\mathrm{GP}^2=\frac{32}{5}+4\mathrm{GP}^2\quad\cdots\cdots(4.6)\end{aligned}$$

であるから，GP の最大値と最小値を求めればよい．

外接円の中心を $O'(0,\ 2)$ とする.

$$O'G^2 = \frac{4}{25} + \frac{81}{25} = \frac{85}{25} \iff O'G = \frac{\sqrt{85}}{5} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

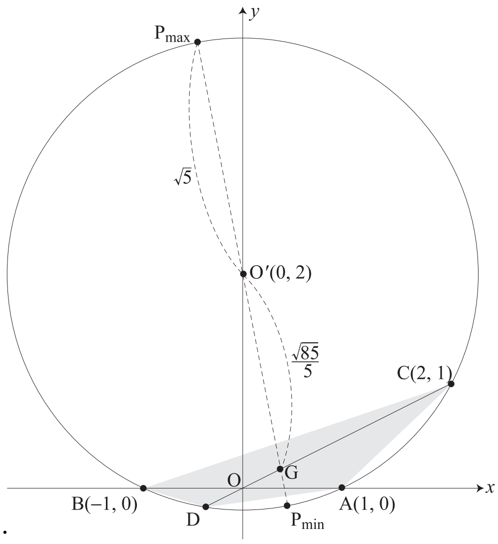
であるから,

$$\sqrt{5} - \frac{\sqrt{85}}{5} \leq GP \leq \sqrt{5} + \frac{\sqrt{85}}{5}$$
$$\iff \frac{42}{5} - 2\sqrt{17} \leq GP^2 \leq \frac{42}{5} + 2\sqrt{17} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

従って, (4.6), (4.8) により,

$$40 - 8\sqrt{17} \leq PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 \leq 40 + 8\sqrt{17}$$

即ち, 求めるべき最大値は $40 + 8\sqrt{17}$, 最小値は $40 - 8\sqrt{17}$ である.



[Note]

(1) における「方冪の定理の逆により」とは,

$$\angle AOC = \angle DOB\ (\textbf{対頂角}) \ \wedge\ OA : OC = OD : OB = 1 : \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

即ち, $\triangle OAC$, $\triangle ODB$ は相似であり, A, B, C, D が共円であることが導かれる.