【17.1】

平面上の変換

$$u = \frac{r^2 x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{r^2 y}{x^2+y^2} \quad (r > 0) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

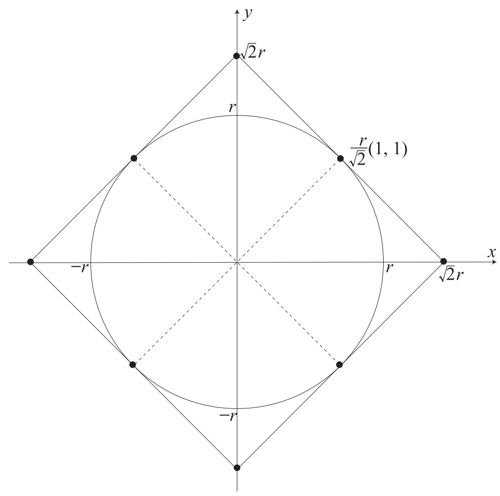
について，次の各問いに答えよ．

(1) この変換による**不動点**をすべて求めよ．

(2) 以下の 4 点を頂点とする正方形を考える．

$$\left(\pm\sqrt{2}r,\ 0\right), \quad \left(0,\ \pm\sqrt{2}r\right)$$

点 $(x,\ y)$ がこの正方形の周および外部の領域を動くとき，点 $(u,\ v)$ の動く領域を図示して，その面積を求めよ．



【解答】

(1) (1.1) において，$(u,\ v) = (x,\ y)$ として，

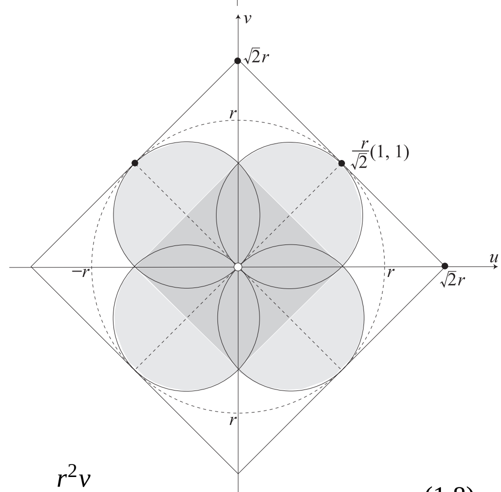
$$x = \frac{r^2 x}{x^2+y^2} \ \wedge\ y = \frac{r^2 y}{x^2+y^2} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

この 2 式の 2 乗和を計算して，

$$x^2+y^2 = \frac{r^4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \iff x^2+y^2 = r^2 \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

従って，求める不動点は円 (1.3) 上の点全体である．

(即ち，(1.3) は不動点の集合としての**不動円**である)



(2) 正方形の各辺を構成する 4 本の直線 (**上図**) は，

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}r - x & \cdots\cdots(1.4) \\ y = \sqrt{2}r + x & \cdots\cdots(1.5) \\ y = -\sqrt{2}r - x & \cdots\cdots(1.6) \\ y = -\sqrt{2}r + x & \cdots\cdots(1.7) \end{cases}$$

題意の領域は方程式 (1.4), $\cdots$, (1.7) の等号を不等号に書き換えた 4 個の不等式の表す領域の和集合として与えられるので，それらを $(1.4)'$, $\cdots$, $(1.7)'$ と表せば，$(1.4)'$ の表す領域を (1.1) によって移した領域は，

$$y \geqq \sqrt{2}r - x \ \wedge\ x = \frac{r^2 u}{u^2+v^2} \ \wedge\ y = \frac{r^2 v}{u^2+v^2} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

即ち，

$$\frac{r^2 v}{u^2+v^2} \geqq \sqrt{2}r - \frac{r^2 u}{u^2+v^2} \iff u^2+v^2 - \frac{r}{\sqrt{2}}\left(u+v\right) \leqq 0 \ \wedge\ (u,\ v) \neq (0,\ 0)$$

$$\iff \left(u - \frac{r}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(v - \frac{r}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leqq \frac{r^2}{4} \ \wedge\ (u,\ v) \neq (0,\ 0) \qquad \cdots\cdots(1.4)''$$

同様の計算により，**原点を中心とする回転対称性**を考慮すれば明らかであるが，

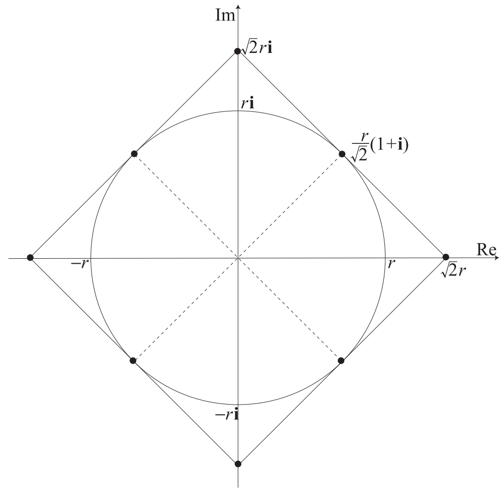
$$\begin{cases} \left(u+\dfrac{r}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(v-\dfrac{r}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \dfrac{r^2}{4} \ \wedge \ (u,\ v) \neq (0,\ 0) & \cdots\cdots(1.5)'' \\ \left(u+\dfrac{r}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(v+\dfrac{r}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \dfrac{r^2}{4} \ \wedge \ (u,\ v) \neq (0,\ 0) & \cdots\cdots(1.6)'' \\ \left(u-\dfrac{r}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(v+\dfrac{r}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \dfrac{r^2}{4} \ \wedge \ (u,\ v) \neq (0,\ 0) & \cdots\cdots(1.7)'' \end{cases}$$

を得る．

題意の領域は不等式 $(1.4)' \vee (1.5)' \vee (1.6)' \vee (1.7)'$ で表されるので，この領域を (1.1) で移した領域は不等式 $(1.4)'' \vee (1.5)'' \vee (1.6)'' \vee (1.7)''$ で表される．これを図示したものが**前頁下図**であり，その領域の面積は，半径 $r/2$ の円 2 個分，1 辺 r の正方形 1 個分の面積に相等するので，

$$2 \times \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi + r^2 = \frac{\pi+2}{2} r^2 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

【別解】 – 複素数による計算 –



(1) $z=x+\mathbf{i}y,\ w=u+\mathbf{i}v$ と表す.
変換の式

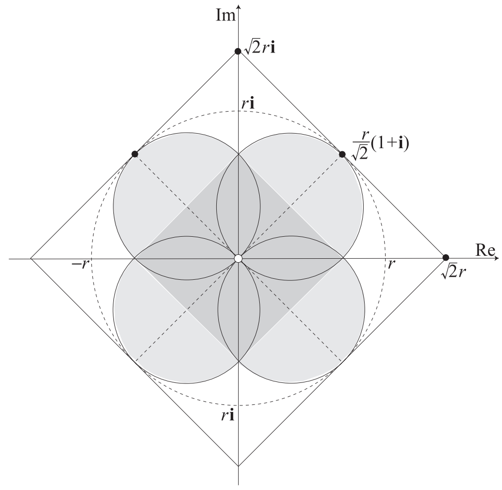
$$w=\frac{r^2}{\overline{z}} \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

に $w=z$ を代入して,

$$z\overline{z}=r^2 \iff |z|=r\ (>0) \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

従って, 求める不動点は円 (1.11) 上の点全体である.
即ち, (1.11) は不動点の集合としての**不動円**である.
(2) 正方形の各辺を構成する 4 本の直線 (**上図**) は,
その通過点と法線方向のベクトルの表す複素数から,

$$\begin{cases} (1-\mathbf{i})z+(1+\mathbf{i})\overline{z}=(1-\mathbf{i})\sqrt{2}r+(1+\mathbf{i})\sqrt{2}r & \cdots\cdots(1.12) \\ (-1-\mathbf{i})z+(-1+\mathbf{i})\overline{z} & \\ \qquad =(-1-\mathbf{i})(-\sqrt{2}r)+(-1+\mathbf{i})(-\sqrt{2}r) & \cdots\cdots(1.13) \\ (-1+\mathbf{i})z+(-1-\mathbf{i})\overline{z} & \\ \qquad =(-1+\mathbf{i})(-\sqrt{2}r)+(-1-\mathbf{i})(-\sqrt{2}r) & \cdots\cdots(1.14) \\ (1+\mathbf{i})z+(1-\mathbf{i})\overline{z}=(1+\mathbf{i})\sqrt{2}r+(1-\mathbf{i})\sqrt{2}r & \cdots\cdots(1.15) \end{cases}$$



題意の領域は, 上の 4 個の方程式の等号を不等号に書き換えた 4 個の不等式の表す領域の和集合として与えられ, それらを $(1.12)',\cdots,(1.15)'$ と表せば, $(1.12)'$ の表す領域を (1.10) で移した領域は,

$$(1-\mathbf{i})z+(1+\mathbf{i})\overline{z}\geq 2\sqrt{2}r\ \wedge\ z=\frac{r^2}{\overline{w}} \iff (1-\mathbf{i})\frac{r}{\overline{w}}+(1+\mathbf{i})\frac{r}{w}\geq 2\sqrt{2}$$

$$\iff 2\sqrt{2}w\overline{w}-(1-\mathbf{i})rw-(1+\mathbf{i})r\overline{w}\leq 0\ \wedge\ w\neq 0 \iff \left(w-\frac{r}{2\sqrt{2}}(1+\mathbf{i})\right)\left(\overline{w}-\frac{r}{2\sqrt{2}}(1-\mathbf{i})\right)\leq\left(\frac{r}{2}\right)^2\ \wedge\ w\neq 0$$

$$\iff \left|w-\frac{r}{2\sqrt{2}}(1+\mathbf{i})\right|\leq\frac{r}{2}\ \wedge\ w\neq 0 \qquad \cdots\cdots(1.12)''$$

同様の計算により, **原点を中心とする回転対称性**を考慮すれば明らかであるが,

$$\left|w-\frac{r(-1+\mathbf{i})}{2\sqrt{2}}\right|\leq\frac{r}{2}\ (w\neq 0)\cdots(1.13)'' \quad \left|w-\frac{r(-1-\mathbf{i})}{2\sqrt{2}}\right|\leq\frac{r}{2}\ (w\neq 0)\cdots(1.14)'' \quad \left|w-\frac{r(1-\mathbf{i})}{2\sqrt{2}}\right|\leq\frac{r}{2}\ (w\neq 0)\cdots(1.15)''$$

題意の領域は不等式 $(1.12)'\vee(1.13)'\vee(1.14)'\vee(1.15)'$ で表されるので, この領域を (1.10) で移した領域は不等式 $(1.12)''\vee(1.13)''\vee(1.14)''\vee(1.15)''$ で表される. これを図示したものが**下図**であり, 図の領域の面積は, 半径 $r/2$ の円 2 個分, 1 辺 r の正方形 1 個分の面積と相等するので,

$$2\times\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi+r^2=\frac{\pi+2}{2}r^2 \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

【17.2】

xy 平面上の放物線 $y=ax^2$ と線分 $bx+y+1=0\ (-1<x<1)$ が共有点を持つとき，実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ．

【解答】

放物線上の点 $(t,\ at^2)$ が線分 $bx+y+1=0\ (-1<x<1)$ 上に存在する条件は，

$$at^2+bt+1=0 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

なる t の方程式が $-1<t<1$ の範囲に少なくとも 1 個の解を持つ条件と同値である．
ここで，$t=0$ は (2.1) の解ではないので，(2.1) 両辺を t^2 で割り，$\dfrac{1}{t}=\tau$ と置けば，

$$\tau^2+b\tau+a=0 \quad (\tau<-1\ \vee\ 1<\tau) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

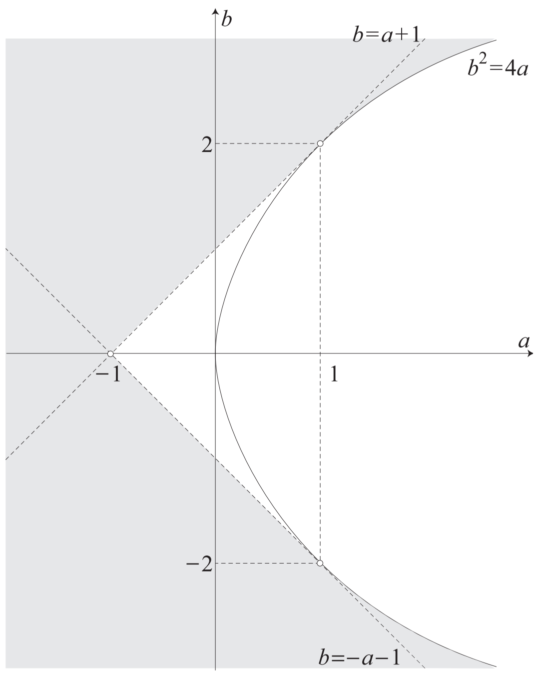
即ち，方程式 (2.2) が $\tau<-1,\ 1<\tau$ の範囲に実数解を持つ条件と同値である．
そこで，(2.2) を ab 平面上の直線と考え，τ の変化に伴う直線 (2.2) の通過領域を求める．
(2.2) 両辺を τ で微分して，

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\tau}\left(\tau^2+b\tau+a\right)=0 \iff \tau=-\frac{b}{2} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.3) を (2.2) に代入して，

$$\left(-\frac{b}{2}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2}\right)+a=0 \iff b^2=4a \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.4) は求める領域における**包絡線**であり，
放物線 $b^2=4a$ と直線 $a+\tau b+\tau^2=0$ は点 $b=-2\tau$ で接するので，
$\tau<-1 \vee 1<\tau$ を考慮して**下図**の領域を得る．ただし，直線上の境界は含まず，放物線上の境界は含む．



【17.3】

xy 平面上において，点 $(x,\ y)$ が領域

$$|x+y|+|x-y| \leqq 2 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を動くとき，次の問いに答えよ．

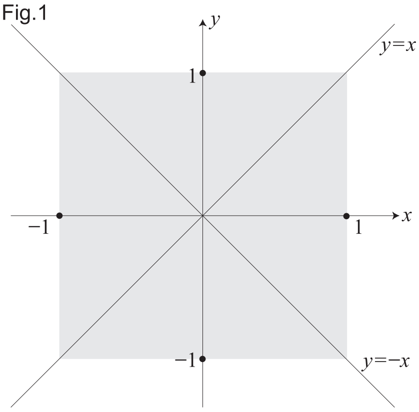
(1) 点 $(x+y,\ x^2+y^2)$ の存在範囲を図示せよ．　(2) 点 $(x+y,\ x^2-y^2)$ の存在範囲を図示せよ．

【解答】

領域 (3.1) を図示して Fig.1 を得るので，

$$|x+y|+|x-y| \leqq 2 \iff -1 \leqq x \leqq 1 \wedge -1 \leqq y \leqq 1 \quad \cdots\cdots(3.2)$$

Fig.1



領域 (3.2) の 2 次写像 (1), (2) による像を求める．

(1) $(x+y,\ x^2+y^2) = (s,\ t)$ と置けば，

$$t = x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = s^2 - 2xy$$

$$\therefore\ x+y = s \wedge xy = \frac{1}{2}(s^2-t) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

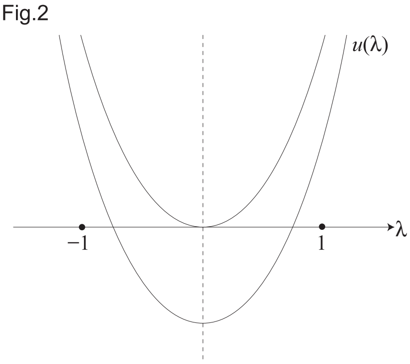
従って，$x,\ y$ を解とする λ の 2 次方程式

$$\lambda^2 - s\lambda + \frac{1}{2}(s^2-t) = 0 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

が $-1 \leqq \lambda \leqq 1$ の範囲に (重複解を含む) 2 解を持つための係数 $s,\ t$ に関する (必要十分) 条件を求めればよいので，

$$u(\lambda) = \lambda^2 - s\lambda + \frac{1}{2}(s^2-t) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

Fig.2

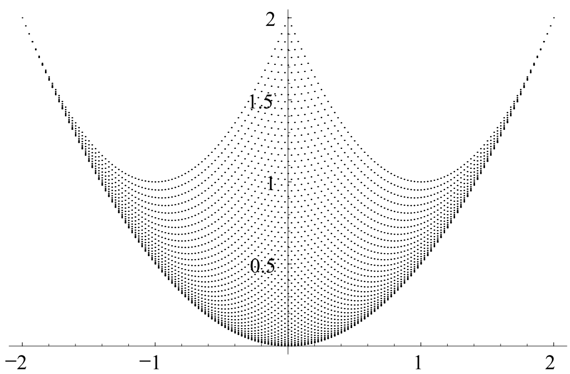


のグラフ (Fig.2) を考慮して，

$$(\textbf{判別式}) \geqq 0 \wedge -1 \leqq (\textbf{対称軸}=)\,\frac{s}{2} \leqq 1 \wedge u(\pm 1) \geqq 0\ (\textbf{端点})$$

$$\iff t \geqq \frac{1}{2}s^2 \ \wedge\ -2 \leqq s \leqq 2 \ \wedge\ t \leqq (s \pm 1)^2 + 1 \quad \cdots\cdots(3.6)$$

が求めるべき必要十分条件であるから，
不等式 (3.6) の表す領域を図示して (**下図**) を得る．



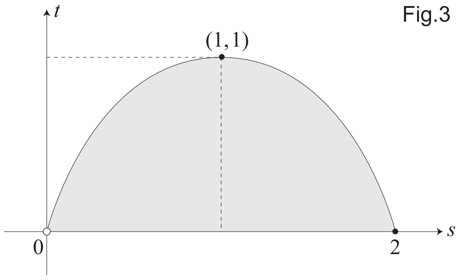
(2) $(x+y,\, x^2-y^2)=(s,\, t)$ と置けば,

$$t=x^2-y^2=(x+y)(x-y)=s(x-y)$$

であるから, $s\neq 0$ の条件の下で,

$$x+y=s \ \wedge \ x-y=\frac{t}{s} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

Fig.3



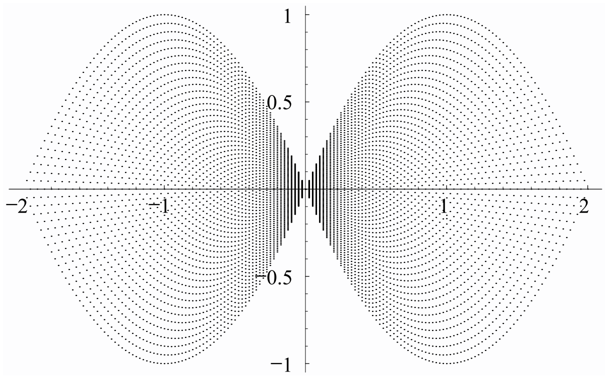
(3.7) を (3.1) に代入して,

$$|s|+\left|\frac{t}{s}\right|\leq 2 \iff s^2-2|s|+|t|\leq 0 \wedge s\neq 0 \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

不等式 (3.8) の表す領域は t 軸対称かつ s 軸対称であるから,
$s>0 \wedge t\geq 0$ の場合を調べればよい. 即ち,

$$s>0 \ \wedge \ t\geq 0 \ \wedge \ t\leq -(s-1)^2+1 \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

(3.9) を図示して Fig.3 を得るので, これを s 軸, t 軸, 原点に関して対称移動して,
更に, $s=0$ の場合である原点 $(s,\, t)=(0,\, 0)$ を追加して**下図**を得る.



【17.4】

平面上の点 $(x,\, y)$ が領域

$$1 \leq x^2+y^2 \leq 2 \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

を動くとき，$x^2y^2+x^2+y^2+xy$ のとり得る値の範囲を求めよ．

【解答】

領域 (4.1) に対して，

$$x+y=u \ \wedge\ xy=v \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

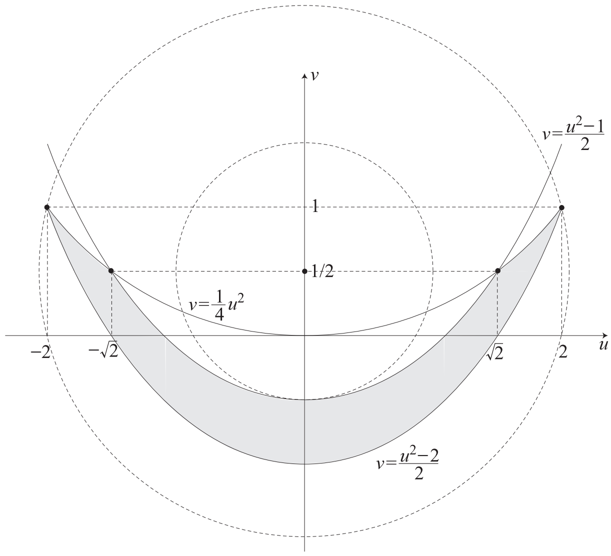
なる変換を与えて，

$$\begin{aligned} &1 \leq u^2-2v \leq 2 \\ &\iff \frac{u^2-2}{2} \leq v \leq \frac{u^2-1}{2} \qquad \cdots\cdots(4.3) \end{aligned}$$

ここで，(4.2) の $x,\, y$ が実数として存在する条件は，
方程式 $\lambda^2-u\lambda+v=0$ の判別式に対して，

$$u^2-4v \geq 0 \iff v \leq \frac{1}{4}u^2 \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

条件 (4.3), (4.4) を uv 平面に図示したものが**右図**.
このとき，



$$x^2y^2+x^2+y^2+xy \overset{\text{put}}{=} k \ \wedge\ (4.2) \iff v^2+u^2-v=k \iff u^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=k+\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

なる uv 平面上の円 (4.5) と領域 (4.3)∧(4.4) が共有点を持つような k の最大値と最小値を求めればよい．
図より，uv 平面上の点 $(0,\, 1/2)$ と領域 (4.3)∧(4.4) 内の点との距離を最大化するのは点 $(\pm 2,\, 1)$ であり，
このとき，

$$\max.\left(k+\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{4} \iff \max.k=4 \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

次に，放物線 $v=\dfrac{u^2-1}{2}$ 上の点 $u=t$ における法線

$$\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u-t\\v-\frac{1}{2}(t^2-1)\end{pmatrix}=0 \iff u+tv-\frac{t^2+t}{2}=0 \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

が点 $\left(0,\, \dfrac{1}{2}\right)$ を通る条件は $t=0$ であるから，
点 $\left(0,\, \dfrac{1}{2}\right)$ と領域 (4.3)∧(4.4) 内の点との距離を最小化するのは点 $\left(0,\, -\dfrac{1}{2}\right)$ であり，

$$\min.\left(k+\frac{1}{4}\right)=1 \iff \min.k=\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

従って，(4.6), (4.8) より，

$$\frac{3}{4} \leq x^2y^2+x^2+y^2+xy \leq 4 \qquad \cdots\cdots(4.9)$$