【18.1】

空間内の 2 平面

$$\pi_1 : x-2y+2z+2=0, \quad \pi_2 : -2x+y+2z-1=0$$

の交線 $\mathfrak{g}$ を含み，π_1, π_2 の交角を 2 等分する 2 平面 π, π' の方程式を求めよ．

【解答】 – 点と平面の距離 –

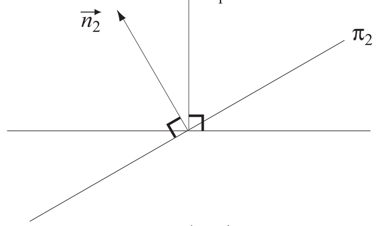
求めるべき 2 平面 π, π' 上の点はすべて 2 平面 π_1, π_2 からの距離が等距離にある．
即ち，2 平面 π, π' はそれぞれ 2 平面 π_1, π_2 から等距離にある点の集合 (軌跡) と考えられる．
そこで，π, π' 上の点を (x_0, y_0, z_0) と表すと，この点から 2 平面 π_1, π_2 への最短距離に関して，

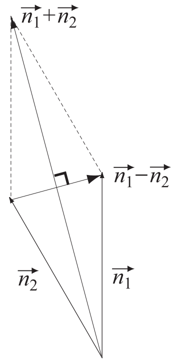
$$\begin{aligned}
\frac{\left|x_0-2y_0+2z_0+2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{\left|-2x_0+y_0+2z_0-1\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} &\iff \left|x_0-2y_0+2z_0+2\right| = \left|-2x_0+y_0+2z_0-1\right| \\
&\iff x_0-2y_0+2z_0+2 = \pm\left(-2x_0+y_0+2z_0-1\right) \\
&\iff -x_0-y_0+4z_0+1=0 \ \lor \ 3x_0-3y_0+3=0
\end{aligned}$$

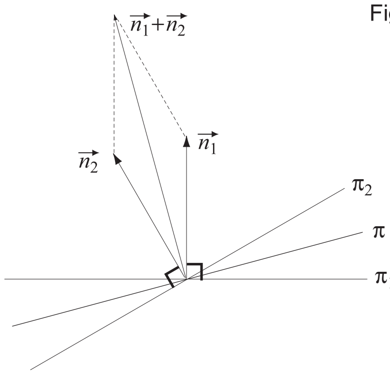
が成り立つので，求める 2 平面 π, π' の方程式は,

$$x+y-4z-1=0, \quad x-y+1=0$$

【別解】 – 法線ベクトル –







π_1, π_2 の法線ベクトルを

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

と表せば,

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \quad \land \quad \left|\overrightarrow{n_1}\right| = \left|\overrightarrow{n_2}\right| = 3 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(1.2) より，$\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ の交角を 2 等分するベクトルは,

$$\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \ \lor \ \overrightarrow{n_1}-\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

と表せ,(Fig.2) これらを π, π' の法線ベクトルと考えてよい.(Fig.3)
一方，交線 $\mathfrak{g}$ を含む平面は一般に,

$$s(x-2y+2z+2)+t(-2x+y+2z-1)=0 \quad (\forall s, \forall t) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

と表せ，(1.4) の法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ は,

$$\overrightarrow{n} = \left(s-2t, \ -2s+t, \ 2s+2t\right) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

と表せるので,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} s-2t \\ -2s+t \\ 2s+2t \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \ \lor \ \begin{pmatrix} s-2t \\ -2s+t \\ 2s+2t \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff s-2t : -2s+t : 2(s+t) = 1 : 1 : -4 \\
&\quad \lor \ s-2t : -2s+t : 2(s+t) = 1 : -1 : 0 \\
&\iff t=s \ \lor \ t=-s \qquad \cdots\cdots(1.6)
\end{aligned}$$

(1.6) により，求める平面 π, π' の方程式は，

$$x+y-4z-1=0, \quad x-y+1=0 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

[Note]

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ より，π_1, π_2 の実際の交角は 90° である．即ち，π_1 の法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}$ と平面 π_2 が重なってしまうので，Fig.1 では 2 平面の交角を 30° として図示した．また，Fig.3 では π_1, π_2 の交角を 2 等分する平面の一方のみを描いた．

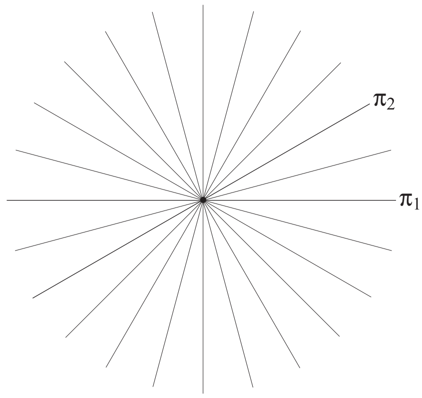
[Note]

(1.4) では，π_1, π_2 の交線 $\mathfrak{g}$ を含む平面を

$$\lambda\, u(x,\, y,\, z)+\mu\, v(x,\, y,\, z)=0 \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

の形で表していることに注意せよ．
λ, μ をすべての実数に渡って動かせば，
(1.8) は $\mathfrak{g}$ を含む無数の平面の集合を構成する．(Fig.4)
この平面の集合を ($\mathfrak{g}$ を含む) **平面束**という．

Fig.4



【18.2】

空間内に正四面体 ABCD を考える．

頂点 A, B は直線 $\mathfrak{g}_1$ 上に，頂点 C, D は直線 $\mathfrak{g}_2$ 上にあり，

$$\mathfrak{g}_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g}_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

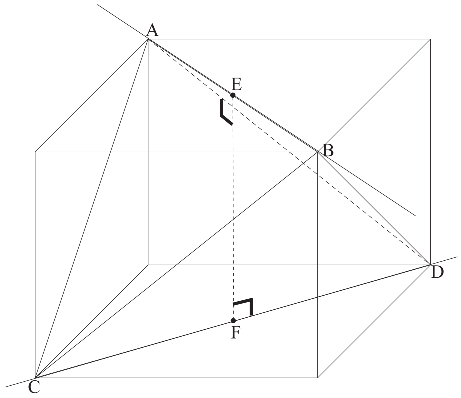
である．また，A の x 座標は B の x 座標より大きく，C の x 座標は D の x 座標より大きい．

(1) AB の中点 E および CD の中点 F の座標を求めよ．

(2) 正四面体 ABCD の 1 辺の長さと体積を求めよ．

(3) A および C の座標を求めよ．

【解答】



(1) 題意の正四面体に外接する立方体を考えるとき，**ねじれの位置**にある 2 直線 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ の最短距離を与える点が立方体の上底面の中心 E および下底面の中心 F である．

$$\because \quad \mathfrak{g}_1 \perp \mathrm{EF} \ \land \ \mathfrak{g}_2 \perp \mathrm{EF}$$

このとき，$\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ の方向ベクトルを $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ で表すと，

$$\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \land \ \overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{d_1} = 0 \ \land \ \overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{d_2} = 0 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

また，$\mathfrak{g}_1$ 上の点 E および $\mathfrak{g}_2$ 上の点 F は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ 2-2s \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

と表されるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \begin{pmatrix} s-t \\ s+t+1 \\ 2-2s \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

このとき，(2.1), (2.2), (2.4) により，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-t \\ s+t+1 \\ 2-2s \end{pmatrix} = 0 \iff t = -\frac{1}{2}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-t \\ s+t+1 \\ 2-2s \end{pmatrix} = 0 \iff s = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

従って，(2.3), (2.5) により，

$$\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right), \quad \mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2) 正四面体の 1 辺の長さは，立方体の 1 辺の長さ $\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|$ の $\sqrt{2}$ 倍であるから，

$$(\textbf{正四面体の一辺}) = \sqrt{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right| = \sqrt{2}\left|(1,\ 1,\ 1)\right| = \sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

更に，この正四面体は立方体の四隅の**三直角四面体**を 4 個切り落として得られる．
この三直角四面体の体積は立方体の体積の 1/6 であるから，正四面体の体積は立方体の体積の 1/3 である．

$$\therefore\ (\textbf{正四面体の体積}) = \left(\sqrt{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \sqrt{3} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(3) $\mathfrak{g}_1$ の方向ベクトル $\overrightarrow{d_1}$ に平行な単位ベクトル

$$\pm\frac{1}{\left|\overrightarrow{d_1}\right|}\overrightarrow{d_1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

を用いて，$\mathfrak{g}_1$ 上の頂点 A, B への位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} \pm \frac{1}{\left|\overrightarrow{d_1}\right|}\overrightarrow{d_1}\times\frac{\sqrt{6}}{2} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\pm\sqrt{3}\\1\mp\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\ \ (\textbf{複号同順}) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

と表され，(2.10) の x 成分の大小を比較して，

$$\mathrm{A}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ 0\right) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

同様に，$\overrightarrow{d_2}$ に平行な単位ベクトル

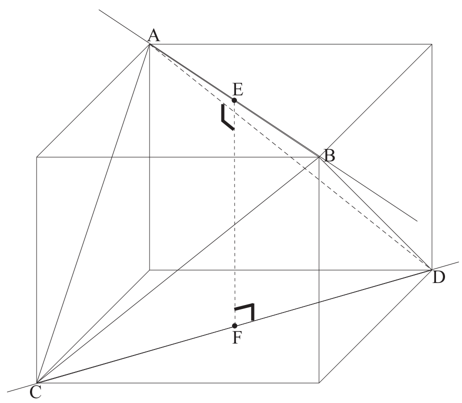
$$\pm\frac{1}{\left|\overrightarrow{d_2}\right|}\overrightarrow{d_2} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} + \frac{1}{\left|\overrightarrow{d_2}\right|}\overrightarrow{d_2}\times\frac{\sqrt{6}}{2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ \vee\ \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \frac{1}{\left|\overrightarrow{d_2}\right|}\overrightarrow{d_2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

と表され，(2.13) の x 成分の大小を比較して，

$$\mathrm{C}\left(1,\ 1,\ 0\right),\quad \mathrm{D}\left(0,\ 0,\ 2\right) \qquad \cdots\cdots(2.14)$$



【18.3】

xyz 空間内において,

球面 $\mathfrak{S}: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ に対して,点 $\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\,0,\,2\right)$ から引いた接線の集合を $\mathfrak{C}_0$ とする.

(1) $\mathfrak{C}_0$ と xy 平面 $z=0$ との共有点の集合を $\mathfrak{C}_1$ とするとき,$\mathfrak{C}_1$ の方程式を求め図示せよ.

(2) $\mathfrak{C}_0$ と球面 $\mathfrak{S}$ との接点の集合を $\mathfrak{C}_2$ とするとき,$\mathfrak{C}_2$ がどのような図形かを述べよ.

【解答】

(1) P から $\mathfrak{S}$ に引いた接線と xy 平面との交点を $\mathrm{Q}(x_1,\,y_1,\,0)$ とするとき,

この接線のベクトル方程式は,$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を方向ベクトルとして,

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x_1-\sqrt{3}\\y_1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}+t\left(x_1-\sqrt{3}\right)\\ty_1\\2-2t\end{pmatrix}\quad(-\infty<t\infty)\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

(3.1) を $\mathfrak{S}$ の方程式に代入して,

$$\left(\sqrt{3}+t\left(x_1-\sqrt{3}\right)\right)^2+(ty_1)^2+(2-2t)^2-2(2-2t)=0$$
$$\iff\ \left(\left(x_1-\sqrt{3}\right)^2+{y_1}^2+4\right)t^2+2\left(\sqrt{3}x_1-5\right)t+3=0\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

(3.1) が $\mathfrak{S}$ の接線であるための必要十分条件は,(3.2) が重複解を持つことであり,(3.2) の判別式に対して,

$$\left(\sqrt{3}x_1-5\right)^2-3\left(\left(x_1-\sqrt{3}\right)^2+{y_1}^2+4\right)=0\iff -4\sqrt{3}x_1-3{y_1}^2+4=0\qquad\cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) により,求めるべき $\mathfrak{C}_1$ の方程式は,**(図略)**

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{4}y^2\ \land\ z=0\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

(2) $\mathfrak{S}$ の中心を $\mathrm{O}'(0,\,0,\,1)$ と表し,$\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ を法線ベクトルとして,$\mathfrak{S}$ 上の接点 $\mathrm{T}(0,\,0,\,2)$ を通る平面は,

$$\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-2\end{pmatrix}=0\iff\sqrt{3}x+z-2=0\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

このとき,接点の集合 $\mathfrak{C}_2$ は,平面 (3.5) 上の円であり,

その中心は平面 (3.5) と線分 $\mathrm{O'P}$ との交点 $\mathrm{O''}$,半径は $\mathrm{O''T}$ で与えられる.**(次頁図参照)**

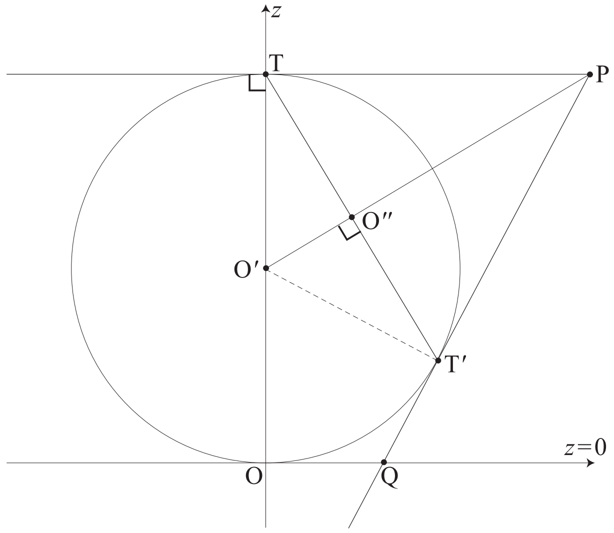
ここで,平面 (3.5) と直線 $\mathrm{O'P}$ との交点 $\mathrm{O''}$ は,

$$\sqrt{3}x+z-2=0\ \land\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}\iff(x,\,y,\,z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\,0,\,\frac{5}{4}\right)\qquad\therefore\ \mathrm{O''}\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\,0,\,\frac{5}{4}\right)\quad\cdots\cdots(3.6)$$

更に,半径 $\mathrm{O''T}$ は,

$$\mathrm{O''T}=\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

即ち,$\mathfrak{C}_2$ は平面 $\sqrt{3}x+z-2=0$ 上にあり,点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\,0,\,\frac{5}{4}\right)$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円である.

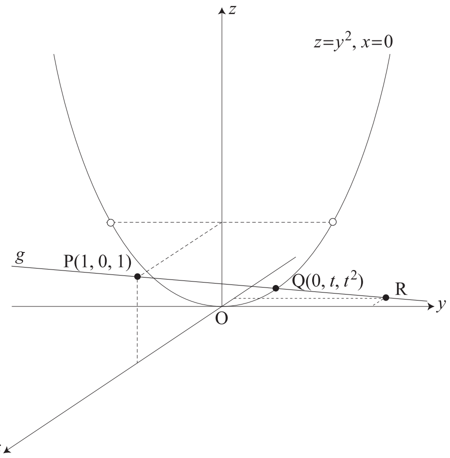


z
T
P
O″
O′
T′
$z=0$
O
Q

【18.3】

xyz 空間内の点 $\mathrm{P}(1,0,1)$ と yz 平面上の放物線 $z=y^2 \wedge x=0$ を考える.
点 Q がこの曲線上を動くとき，直線 PQ と xy 平面との交点 R の描く図形を $\mathfrak{C}$ とする.
また，xy 平面内において，$\mathfrak{C}$ を x 軸の正の方向に $-\dfrac{1}{2}$ 平行移動し，左回りに 45° 回転した図形を $\mathfrak{C}'$ とする.
このとき，$\mathfrak{C}'$ の方程式を求め，その概形を図示せよ.

【解答】



yz 平面内の放物線 $z=y^2 \wedge x=0$ 上の点 Q は実数の parameter$t$ を用いて，$\mathrm{Q}(0,t,t^2)$ $(-\infty<t<\infty)$ と表せる．このとき，2 点 P, Q を通る直線 $\mathfrak{g}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を方向 vector，s を実数の parameter として，

$$\mathfrak{g}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ t \\ t^2-1 \end{pmatrix} \quad (-\infty<s<\infty) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

と表すことができる．この直線 (3.1) と xy 平面 $z=0$ との交点 R は，$t^2\neq 1$ (i.e. $t\neq\pm1$) の条件の下に，

$$(z=)\ 1+s(t^2-1)=0 \ \wedge\ t\neq\pm1 \iff s=\frac{1}{1-t^2} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

で与えられるので，

$$x=1-\frac{1}{1-t^2} \ \wedge\ y=\frac{t}{1-t^2} \ \cdots\cdots(3.3) \qquad \therefore\ \mathrm{R}\left(\frac{-t^2}{1-t^2},\frac{t}{1-t^2},0\right) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

と表せる.
このとき，$x-1\neq 0$ の条件の下で，

$$\frac{-y}{x-1}=t \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) を (3.3) の x または y の式に代入して，

$$(x-1)\left\{\left(\frac{-y}{x-1}\right)^2-1\right\}=1 \iff y^2-x^2+x=0 \ \wedge\ x\neq1 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.3) の形から，如何なる実数 t に対しても $x=1$ とならないので，
$\mathfrak{C}$ の方程式は (3.6) で与えられる.

$$\therefore\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4} \ \wedge\ (x,y)\neq(1,0) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

次に，$\mathfrak{C}$ を x 軸の正の方向に $-1/2$ 平行移動した図形は，

$$x^2-y^2=\frac{1}{4} \ \wedge\ (x,y)\neq\left(\frac{1}{2},0\right) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

一般に，平面上の点 (x, y) を正の向きに 45° 回転した点を (x', y') で表せば，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \ \wedge \ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

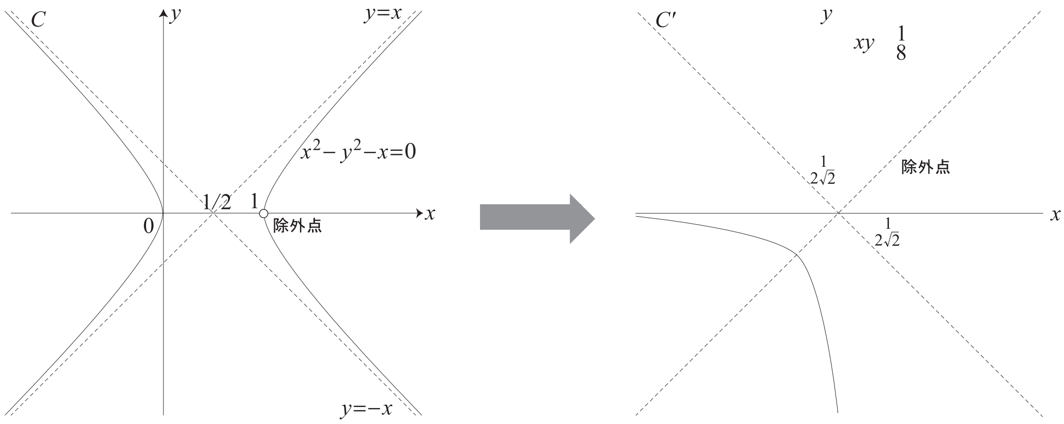
と表されるので，(3.9) を (3.8) に代入して，

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(-x' + y')^2 = \frac{1}{4} \iff x'y' = \frac{1}{8} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

更に，(3.8) における除外点 $(1/2, 0)$ を正の向きに 45° 回転した点は $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ であるから，
求める図形 $\mathfrak{C}'$ の方程式は，

$$xy = \frac{1}{8} \ \wedge \ (x, y) \neq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

これを図示したものが**下右図**である．



【18.4】

球面 $\mathfrak{S}: x^2+y^2+z^2=1$ と z 軸との交点を A(0, 0, 1), B(0, 0, −1) とし，xy 平面上の原点と異なる点を P(x, y, 0) とする．また，直線 PA が球面 $\mathfrak{S}$ と交わる (A と異なる) 点を Q とし，直線 QB が xy 平面と交わる点を R(u, v, 0) とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) u, v のそれぞれを x, y の式で表せ．

(2) P が xy 平面上の直線 $x+y=1$, $z=0$ 上を動くとき，R の軌跡および Q の軌跡を求めよ．

(3) P が xy 平面上の円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $z=0$ 上を動くとき，R の軌跡を求めよ．

【解答】

(1) 直線 AP と球面 $\mathfrak{S}$ との交点が Q(x', y', z') であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AP}} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z'-1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0) \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

Q は球面 $\mathfrak{S}$ 上にあり，$(x')^2+(y')^2+(z')^2=1$ を満たすので，

$$(tx)^2+(ty)^2+(1-t)^2=1 \iff (x^2+y^2+1)t^2-2t=0 \iff t=0 \vee t=\frac{2}{x^2+y^2+1} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

ここで，$t=0$ は A(0, 0, 1) を表すので，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\ \frac{2y}{x^2+y^2+1},\ \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

このとき，B, Q を結ぶ直線上の点は，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\times\frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2x^2+2y^2 \end{pmatrix} \quad (\forall s : \text{実数}) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

(4.4) の z 成分を 0 として，

$$\frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2+1}s-1=0 \iff s=\frac{x^2+y^2+1}{2(x^2+y^2)} \quad (\because\ \mathrm{P}\neq\mathrm{O}) \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

(4.5) を (4.4) に代入して，

$$\mathrm{R}\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2},\ 0\right) \wedge (x,\ y)\neq(0,\ 0) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

即ち，

$$u=\frac{x}{x^2+y^2} \wedge v=\frac{y}{x^2+y^2} \wedge (x,\ y)\neq(0,\ 0) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(2) ● R の軌跡を求める．

(4.7) を x, y について解いて，

$$x=\frac{u}{u^2+v^2} \wedge y=\frac{v}{u^2+v^2} \wedge (u,\ v)\neq(0,\ 0) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(4.8) を $x+y=1$, $z=0$ に代入して，

$$\frac{u}{u^2+v^2}+\frac{v}{u^2+v^2}=1 \iff u^2+v^2-u-v=0 \wedge (u,\ v)\neq(0,\ 0) \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

(4.9) により，R の軌跡は，

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \wedge (x,\ y)\neq(0,\ 0) \wedge z=0 \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

● Q の軌跡を求める.

直線 $x+y=1,\ z=0$ 上の動点 P と $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ直線の集合は平面 $x+y+z=1$ を構成するので,
Q は平面 $x+y+z=1$ と球面 $\mathfrak{S}$ の交円 $\mathfrak{C}$ 上を動く. 即ち,

$$\mathfrak{C}:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & \cdots\cdots(4.11) \\ x+y+z=1 & \cdots\cdots(4.12) \end{cases}$$

このとき, $\mathfrak{S}$ の中心である原点と平面 (4.12) との距離は,

$$\frac{\left|0+0+0-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

であり, 原点を通り, ベクトル $\left(1,\ 1,\ 1\right)$ に平行な直線 $x=y=z$ と (4.12) との交点は,

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

であるから, Q の軌跡は,

$$\text{平面 } x+y+z=1 \text{ 上にあり, 中心}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \text{半径}\sqrt{\frac{2}{3}}\text{の円} \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

(3) (4.8) を $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ に代入して,

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2-2\times\frac{u}{u^2+v^2}-2\times\frac{v}{u^2+v^2}+1=0$$

$$\iff u^2+v^2-2u-2v+1=0 \ \land\ (u,\ v)\neq(0,\ 0) \qquad \cdots\cdots(4.15)$$

(4.15) により, R の軌跡は,

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \ \land\ z=0 \qquad \cdots\cdots(4.16)$$