**【19.1】**

実数 $x,\ y$ が不等式

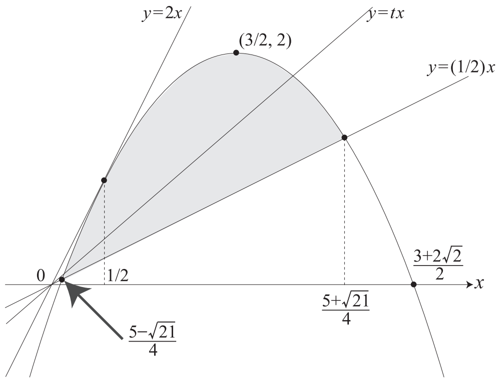
$$x \leq 2y \ \wedge\ y \leq -x^2+3x-\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

を満たすとき,

$$\frac{x^2}{2x^2-2xy+y^2} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

のとり得る値の範囲を求めよ.

**【解答】**




(1.1) の表す領域 $\mathfrak{D}$ 内の点に対して, $x \neq 0$ としてよいので,
(1.2) の関数 $u(x,\ y)$ において,

$$u(x,\ y)=\frac{x^2}{2x^2-2xy+y^2}=\frac{1}{2-2\cdot\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

ここで, $\dfrac{y}{x}=t$ と置けば,

$$u(x,\ y)=\frac{1}{t^2-2t+2}=\frac{1}{(t-1)^2+1}\overset{\text{put}}{=}v(t) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

このとき, $\mathfrak{D}$ 内の点 $(x,\ y)$ に対して, $t\,(=y/x)$ のとり得る値の範囲は, **上図**において,
領域 $\mathfrak{D}$ と直線 $y=tx$ が共有点を持つような傾き $t$ のとり得る値の範囲であるから,
原点通過直線 $y=tx$ と放物線 $y=-x^2+3x-\dfrac{1}{4}$ が

$$-x^2+3x-\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}x \iff \frac{5-\sqrt{21}}{4} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{21}}{4} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

の範囲のある点 $x=x_0$ で接する条件

$$-x^2+3x-\frac{1}{4}-tx=-(x-x_0)^2 \ \wedge\ \frac{5-\sqrt{21}}{4} \leq x_0 \leq \frac{5+\sqrt{21}}{4} \iff x_0=\frac{1}{2} \ \wedge\ t=2 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

を考慮して,

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 2 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

従って, $v(t)$ の (1.7) における最大値 · 最小値を調べればよい. 即ち,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{(t-1)^2+1} \leq 1 \iff \frac{1}{2} \leq v(t) \leq 1 \iff \frac{1}{2} \leq u(x,\ y) \leq 1 \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

**【19.2】**

(1) 半径 $r$ の円に内接する三角形の面積の最大値を求めよ．

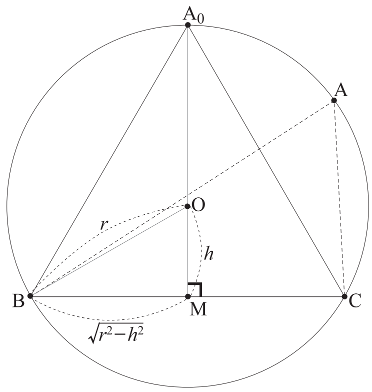
(2) 空間内の点 O に対して，4 点 A, B, C, D を

$$\mathrm{OA}=1, \quad \mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=4$$

を満たすように配置するとき，四面体 ABCD の体積の最大値を求めよ．

**【解答】**

(1) **右図**のように，BC を中心 O の下側に固定したとき，三角形 ABC の面積を最大にする A は $\mathrm{A_0}$(BC の垂直 2 等分線と円との交点) の位置である．このとき，BC の中点を M として，$\mathrm{OM}=h\ (0 \leq h < r)$ と置けば，三角形 $\mathrm{A_0BC}$ の面積 $S$ は，




$$S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{r^2-h^2}\times(r+h)=\sqrt{(r+h)^3(r-h)} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

ここで，(2.1) 右辺の根号内の式を $u(h)$ と置けば，

$$u'(h)=3(r+h)^2(r-h)-(r+h)^3=2(r+h)^2(r-2h) \quad \cdots\cdots(2.2)$$

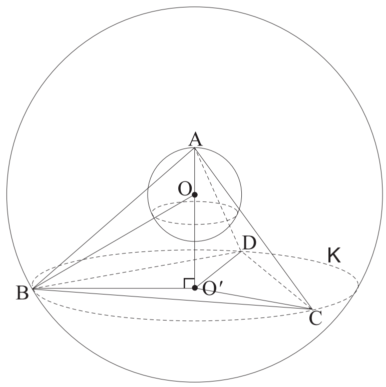
(2.2) により，$u(h)$ は $h=r/2$ において極大かつ最大となる．即ち，

$$\max.u(h)=\frac{27r^4}{16} \iff \max.S=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

このとき，$\angle\mathrm{BOM}=\angle\mathrm{BA_0C}=60^\circ$ となり，三角形 ABC は正三角形である．

(2) $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=4$ より，3 点 B, C, D は O を中心とする半径 4 の球面上にある．この 3 点を通る平面 $\pi$ と球面との交円 K の周上に 3 点 B, C, D を配置するとき，(1) により，三角形 BCD の面積を最大にするのは正三角形の 3 頂点となる位置に配置したときである．

そこで，K を中心 O からの距離が $h\ (0 \leq h < 4)$ となる位置にとり固定する．このとき，四面体 ABCD の体積が最大となるのは三角形 BCD を正三角形とし，A を直線 $\mathrm{OO'}$ と半径 1 の球面との上側の交点の位置に配置したときである．このとき，四面体 ABCD の体積 $V$ は，




$$V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{16-h^2}\right)^2\times(h+1)=\frac{\sqrt{3}}{4}(16-h^2)(h+1) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

ここで，$0 \leq h < 4$ の範囲において，$v(h)=(16-h^2)(h+1)$ と置けば，

$$v'(h)=-2h(h+1)+16-h^2=16-2h-3h^2=(2-h)(8+3h) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) により，$v(h)$ は $h=2$ において極大かつ最大となる．即ち，

$$\max.v(h)=36 \iff \max.V=9\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

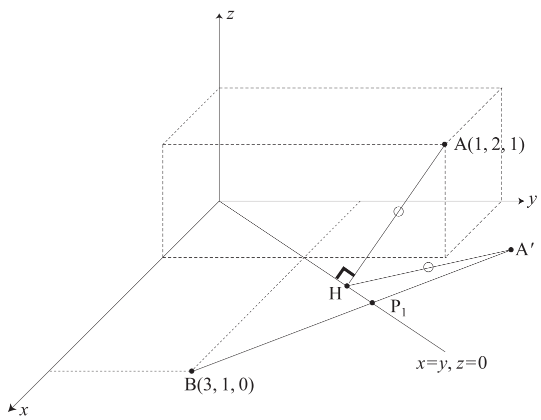
**【19.3】**

$xyz$ 空間内に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1,\ 0)$ と直線 $\mathfrak{L}: x=y,\ z=0$ がある.
点 P が直線 $\mathfrak{L}$ 上を動くとき,

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}\ \text{を最小にする点}\ \mathrm{P}_1\ \text{の座標,}\quad \left|\mathrm{AP}-\mathrm{BP}\right|\ \text{を最大にする点}\ \mathrm{P}_2\ \text{の座標}$$

をそれぞれ求めよ.

**【解答】**




$\mathfrak{L}$ 上の点 $\mathrm{H}(t,\ t,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 1)$ を結ぶベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\begin{pmatrix}t-1\\t-2\\-1\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

に対して, $\mathfrak{L}$ の方向ベクトル $\overrightarrow{d}=\left(1,\ 1,\ 0\right)$ との内積を考え,

$$\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0\iff t=\frac{3}{2}\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

より, $\mathrm{H}\left(3/2,\ 3/2,\ 0\right)$ を得るので,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\left|\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1\right)\right|=\sqrt{\frac{3}{2}}\qquad\cdots\cdots(3.3)$$

(3.3) により, A を $\mathfrak{L}$ の周りに回転した $xy$ 平面上の点 A′ は,
$\mathfrak{L}$ に垂直な方向の $xy$ 平面内のベクトル $\overrightarrow{n}=\left(-1,\ 1,\ 0\right)$ を用いて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\times\frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3-\sqrt{3}\\3+\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

と表せるので,

$$\mathrm{A'}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\ \frac{3+\sqrt{3}}{2},\ 0\right)\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

次に, $xy$ 平面上の直線 A′B の方程式は, その方向ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}$ と平行なベクトル $\left(\sqrt{3},\ -1,\ 0\right)$ にとり,

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}t+3\\-t+1\\0\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(3.6)$$

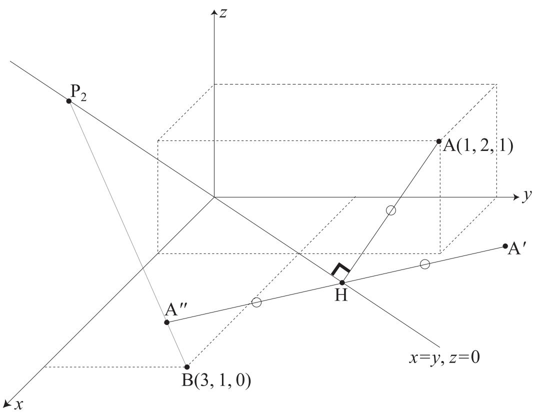
と表せるので, 求める点 $\mathrm{P}_1$ は直線 A′B と $\mathfrak{L}$ との交点であり, (3.6) において $x=y$ として,

$$\sqrt{3}t+3=-t+1\iff t=-\sqrt{3}+1$$

従って,

$$\mathrm{P}_1\left(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 0\right)\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

次に，$\mathrm{A}'$ の $\mathfrak{L}$ に関する対称点を $\mathrm{A}''$ とすれば，
(3.4) におけるベクトル $\overrightarrow{n}$ を用いて，




$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \mathrm{A}''\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ \frac{3-\sqrt{3}}{2},\ 0\right) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

このとき，直線 $\mathrm{A''B}$ の方程式は，
$\overrightarrow{\mathrm{A''B}}$ と平行なベクトル $\left(\sqrt{3},\ 1,\ 0\right)$ を用いて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}t+3 \\ t+1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

と表せるので，求める点 $\mathrm{P}_2$ は直線 $\mathrm{A''B}$ と $\mathfrak{L}$ との交点であり，(3.9) において $x = y$ として，

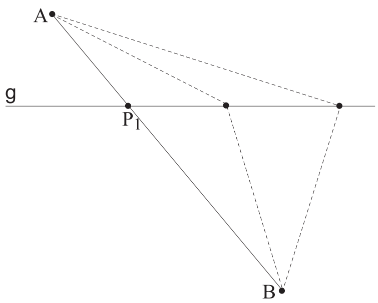
$$\sqrt{3}t + 3 = t + 1 \iff t = -\sqrt{3} - 1$$

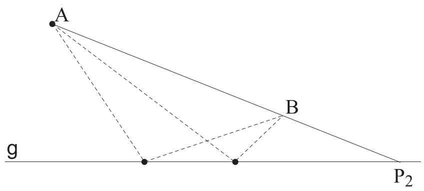
従って，

$$\mathrm{P}_2\left(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0\right) \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

**[Note]**

直線 $\mathfrak{g}$ に関して反対側にある 2 点 A, B と $\mathfrak{g}$ 上の動点 P に対して，折れ線の長さの和 $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ を最小にする点 P は，三角不等式 $\mathrm{AP}+\mathrm{BP} \geq \mathrm{AB}$ における等号成立条件，即ち，線分 AB と $\mathfrak{g}$ との交点 $\mathrm{P}_1$ である．また，
直線 $\mathfrak{g}$ に関して同じ側にある 2 点 A, B と $\mathfrak{g}$ 上の動点 P に対して，折れ線の長さの差 (の絶対値) $\left|\mathrm{AP}-\mathrm{BP}\right|$ を最大にする点 P は，三角不等式 $\mathrm{AP}-\mathrm{BP} \leq \mathrm{AB}$ における等号成立条件，即ち，直線 AB と $\mathfrak{g}$ との交点 $\mathrm{P}_2$ である．



**【19.4】**

半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C をとる．BC = 1 のとき，AB + AC の最大値を求めよ．

**【解答】　– 等長変換 –**

Fig.1 において，OB = OC = BC = 1 より，

$$\angle\mathrm{BOC} = 60^\circ \iff \angle\mathrm{BAC} = 30^\circ$$

このとき，線分 CA の延長上に点 A′ を

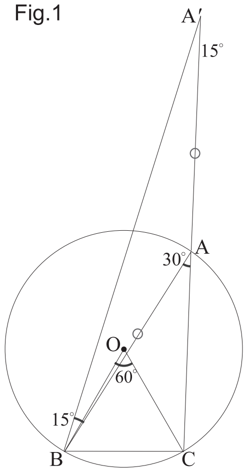
$$\mathrm{AB} = \mathrm{AA}'$$

を満たすようにとれば，

$$\begin{cases} \angle\mathrm{AA'B} = \angle\mathrm{ABA'} = 15^\circ \\ \mathrm{AB} + \mathrm{AC} = \mathrm{AA'} + \mathrm{AC} = \mathrm{CA'} \end{cases}$$

より，∠BA′C = 15° を満たしつつ，
線分 CA′ の長さを最大化すればよい．
このとき，A′ は定点 B, C から見込む角が一定値 15° を保って移動するので，
Fig.2 の円 (長さ 1 の弦 BC に対する中心角 ∠BAC = 30° の円) の周上を動く．
従って，CA′ の長さを最大にする A′ は，CA′ がこの円の直径となる点 A″ の位置である．

Fig.1



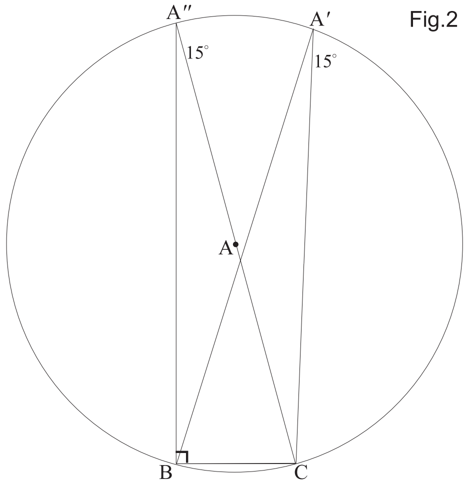




Fig.2

$$\therefore\ \mathrm{AB} + \mathrm{AC} = \mathrm{CA'} \leqq \mathrm{CA''} = \frac{1}{\sin 15^\circ} = \frac{1}{\sin(45^\circ - 30^\circ)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

以上より，求める最大値は $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ である．

**【別解】　– 正弦定理 –**

∠ABC = $b$, ∠ACB = $c$ と表す．
Fig.3 において，∠BOC = 60° より外接円の半径は 1 である．
このとき，△ABC に対する**正弦定理**により，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin b} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin c} = 2 \times 1 \iff \mathrm{AB} = 2\sin c \ \wedge\ \mathrm{AC} = 2\sin b$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} + \mathrm{AC} &= 2\left(\sin b + \sin c\right) \\ &= 2 \times 2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2} = 4\sin 75^\circ \cos\frac{b-c}{2} \\ &\leqq 4 \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times 1 = \sqrt{6}+\sqrt{2} \end{aligned}$$

Fig.3