【20.1】

xy 平面上の 2 点 P, Q に対して，

P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ で表す．

(1) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ に対して，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ．

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ と点 $\mathrm{B}(-1,\ 1)$ に対して，$d(\mathrm{A},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{B})$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ．

(3) 実数 $a\geq 0$ に対して，点 $\mathrm{Q}(a,\ a^2+1)$ を考えるとき，次の条件

「原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ となる $a\geq 0$ が存在する」

を満足する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ．

【解答】

(1) $d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})$ より，

$$|x|+|y|=|x-1|+|y-3| \iff |x|-|x-1|=|y-3|-|y| \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

ここで，

$$|x|-|x-1|=\begin{cases} -1 & (x\leq 0) \\ 2x-1 & (0<x<1) \\ 1 & (1\leq x) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

更に，

$$|y-3|-|y|=\begin{cases} 3 & (y\leq 0) \\ 3-2y & (0<y<3) \\ -3 & (3\leq y) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

であるから，x の範囲で分類して，

• $x\leq 0$ の場合；(1.1) により，

$$-1=3-2y \ \wedge\ 0<y<3 \iff y=2 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

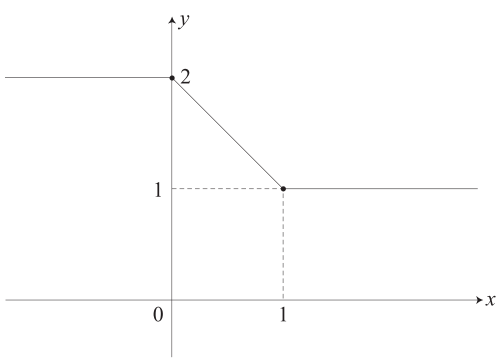
• $0<x<1$ の場合；$-1<2x-1<1$ であるから，(1.1) により，

$$2x-1=3-2y \ \wedge\ 0<y<3 \iff x+y=2 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

• $1\leq x$ の場合；(1.1) により，

$$1=3-2y \ \wedge\ 0<y<3 \iff y=1 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.4), (1.5), (1.6) を図示して**下図**を得る．



(2) $d(\mathrm{A},\,\mathrm{P}) = d(\mathrm{P},\,\mathrm{B})$ より,

$$\left|x-1\right|+\left|y-3\right| = \left|x+1\right|+\left|y-1\right| \iff \left|x-1\right|-\left|x+1\right| = \left|y-1\right|-\left|y-3\right| \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

ここで,

$$\begin{cases} \left|x-1\right|-\left|x+1\right| = \begin{cases} 2 & (x \leq -1) \\ -2x & (-1 < x < 1) \\ -2 & (1 \leq x) \end{cases} & \cdots\cdots(1.8) \\ \\ \left|y-1\right|-\left|y-3\right| = \begin{cases} -2 & (y \leq 1) \\ -4+2y & (1 < y < 3) \\ 2 & (3 \leq y) \end{cases} & \cdots\cdots(1.9) \end{cases}$$

更に,

$$-1 < x < 1 \iff -2 < -2x < 2 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

$$1 < y < 3 \iff -2 < 2y-4 < 2 \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

を考慮して, x の範囲で分類すれば,

● $x \leq -1$ の場合; (1.7) により,

$$3 \leq y \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

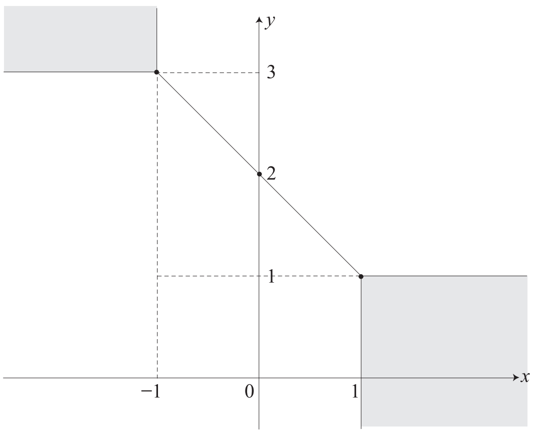
● $-1 < x < 1$ の場合; (1.7) により,

$$-2x = 2y-4 \ \wedge\ 1 < y < 3 \iff x+y = 2 \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

● $1 \leq x$ の場合; (1.7) より,

$$y \leq 1 \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

(1.12), (1.13), (1.14) を図示して**下図**を得る.



(3) $d(\mathrm{O},\ \mathrm{P}) = d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ より,

$$|x| + |y| = |x-a| + |y-(a^2+1)| \iff |x| - |x-a| = |y-(a^2+1)| - |y| \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

ここで, $a \geq 0$ に注意して,

$$\begin{cases} |x| - |x-a| = \begin{cases} -a & (x \leq 0) \\ 2x-a & (0 < x < a) \\ a & (a \leq x) \end{cases} & \cdots\cdots(1.16) \\ \\ |y-(a^2+1)| - |y| = \begin{cases} a^2+1 & (y \leq 0) \\ -2y+a^2+1 & (0 < y < a^2+1) \\ -a^2-1 & (a^2+1 \leq y) \end{cases} & \cdots\cdots(1.17) \end{cases}$$

更に, $a^2+1 > a$ であることを考慮して,

● $x \leq 0$ の場合; (1.15) により,

$$-a = -2y + a^2 + 1 \ \wedge\ 0 < y < a^2+1 \iff y = \frac{1}{2}\left(a^2+a+1\right) \qquad \cdots\cdots(1.18)$$

● $0 < x < a$ の場合; $-a < 2x - a < a$ であるから, (1.15) により,

$$2x - a = -2y + a^2 + 1 \ \wedge\ 0 < y < a^2+1 \iff x + y = \frac{1}{2}\left(a^2+a+1\right) \qquad \cdots\cdots(1.19)$$

● $a \leq x$ の場合; (1.15) により,

$$a = -2y + a^2 + 1 \ \wedge\ 0 < y < a^2+1 \iff y = \frac{1}{2}\left(a^2-a+1\right) \qquad \cdots\cdots(1.20)$$

(1.18), (1.19), (1.20) を図示して**左図**を得る.
この図の折れ線を $a \geq 0$ の範囲で動かした際の通過領域が求める存在範囲であるから,

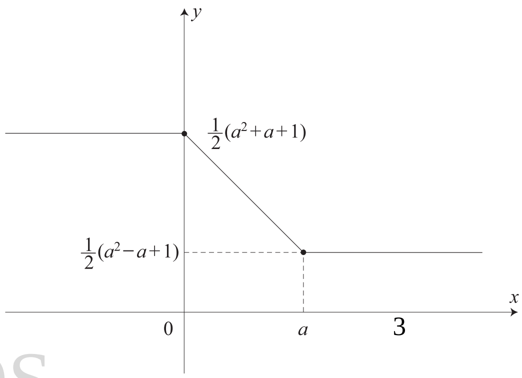
● $x \leq 0$ のとき,

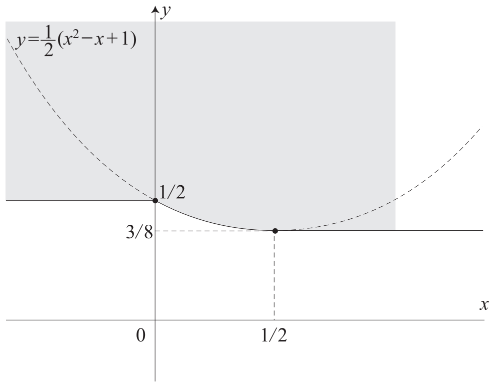
$$y = \frac{1}{2}\left(a^2+a+1\right) \geq \frac{1}{2} \quad (\because\ a \geq 0) \qquad \cdots\cdots(1.21)$$

$0 < x$ のとき, 折れ線の右側の端点 $\left(a,\ \frac{1}{2}\left(a^2-a+1\right)\right)$ の軌跡は, 放物線

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2-x+1\right) = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \qquad \cdots\cdots(1.22)$$

であることに注意して**右図**を得る.





【20.2】

$a \geq 0$ とするとき，不等式

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x-y}{x+y} \leq \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を満たすすべての $x > 0,\ y > 0$ に対して，

$$x^3 - 3a^2xy^2 + 2y^3 \geq 0 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

【解答】

$x > 0,\ y > 0$ より，$\dfrac{x}{y} = t > 0$ によって (2.1), (2.2) を書き換えると，

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{t-1}{t+1} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{3} \leq t \leq 3 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

を満たすすべての $t > 0$ に対して，

$$t^3 - 3a^2t + 2 \geq 0 \iff \frac{t^3+2}{3t} \geq a^2 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

が成り立つような a の値の範囲を求めればよい．
(2.4) の左辺に対して**相加相乗平均の不等式**を用いて，

$$\frac{1}{3}\left(t^2 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\right) \geq \sqrt[3]{t^2 \times \frac{1}{t} \times \frac{1}{t}} = 1 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

ここで，(2.5) の等号条件は，

$$t^2 = \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \iff t^3 = 1 \iff t = 1 \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

であり，(2.6) は (2.3) を満たすので，(2.4) 左辺の最小値は 1 である．
この最小値が右辺 a^2 の最大値と一致すればよいので，

$$a^2 \leq 1 \iff 0 \leq a \leq 1 \quad \left(\because\ a \geq 0\right) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

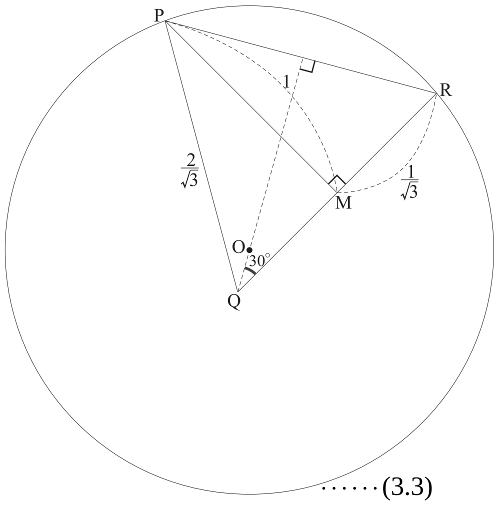
[Note]

関数 $t^3 - 3a^2t + 2\ \left(1/3 \leq t \leq 3\right)$ の最小値が 0 以上となる条件を a の値の範囲で分類して調べるのが一般的な解法と思われる．ただし，この方法は場合分けに手間がかかるので，上では**相加相乗平均の不等式**を用いた．

【20.3】

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 P をとり，円の内部または周上に 2 点 Q, R を三角形 PQR が 1 辺の長さ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形となるようにとるとき，$\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2$ の最大値および最小値を求めよ．

【解答】　– 中線定理 –



三角形 OQR において，QR の中点を M とすると，

中線定理により，

$$\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2=2\left(\mathrm{OM}^2+\mathrm{MQ}^2\right)=2\mathrm{OM}^2+\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

従って，OM の最大値と最小値を求めればよい．

$\mathrm{PM}=1$ (**半径**) であるから，

OM が最小となるのは $\mathrm{M}=\mathrm{O}$ のときであり，

$$\min.\left(\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2\right)=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

OM が最大となるのは，Q または R が円周上にあるときで,(**右図**)

このとき，$\mathrm{QR}=\mathrm{QP} \land \mathrm{OP}=\mathrm{OR}$ より，OQ は $\angle\mathrm{RQP}$ を等分する．

$$\therefore\ \angle\mathrm{OQR}=30^\circ \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

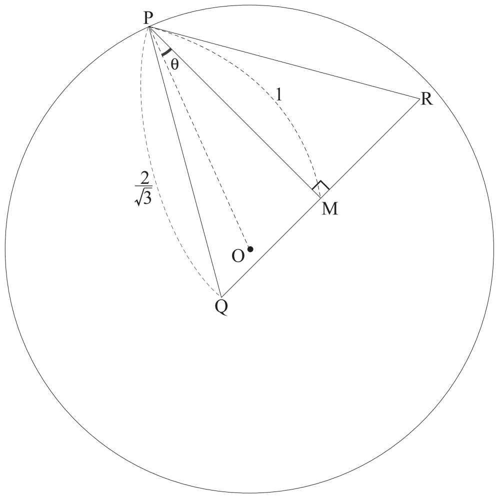
ここで，三角形 OQR に**余弦定理**を用いて，

$$\mathrm{OR}^2=\mathrm{OQ}^2+\mathrm{QR}^2-2\mathrm{OQ}\times\mathrm{QR}\cos 30^\circ \iff \mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OQ}+\frac{1}{3}=0 \quad \left(\because\ \mathrm{QR}=\frac{2}{\sqrt{3}},\ \mathrm{OR}=1\right) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.4) により，

$$\mathrm{OQ}=\frac{3-\sqrt{6}}{3}\ (<1) \qquad \therefore\ \max.\left(\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2\right)=2\mathrm{OQ}-\frac{1}{3}+1^2=\frac{8-2\sqrt{6}}{3} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

【別解】　– 角を変数にとる –



$$\begin{aligned}\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}-\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|^2+2\left|\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)\\&=\frac{14}{3}-2\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{PM}} \qquad \cdots\cdots(3.6)\end{aligned}$$

ここで，$\angle\mathrm{OPM}=\theta$ とすると，

$$\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2=\frac{14}{3}-4\cos\theta \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

即ち，$\cos\theta$ の最大値と最小値を求めればよい．

$$\therefore\ \min.\left(\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2\right)=\frac{14}{3}-4=\frac{2}{3}\ \ (\theta=0) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

更に，Q または R が円周上にあるとき，θ は最大となるので，三角形 OPR に**余弦定理**を用いて，

$$\mathrm{OR}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{PR}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{PR}\cos\angle\mathrm{OPR}$$

$$\iff\ 1=1+\frac{4}{3}-2\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\angle\mathrm{OPR} \iff \cos\angle\mathrm{OPR}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

前頁下図より，$0 < \angle\mathrm{OPR} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\sin\angle\mathrm{OPR} = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

このとき，

$$\begin{aligned}\cos\theta = \cos(\angle\mathrm{OPR} - 30^\circ) &= \cos\angle\mathrm{OPR}\cdot\cos 30^\circ + \sin\angle\mathrm{OPR}\cdot\sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{6}}{6} \qquad \cdots\cdots(3.11)\end{aligned}$$

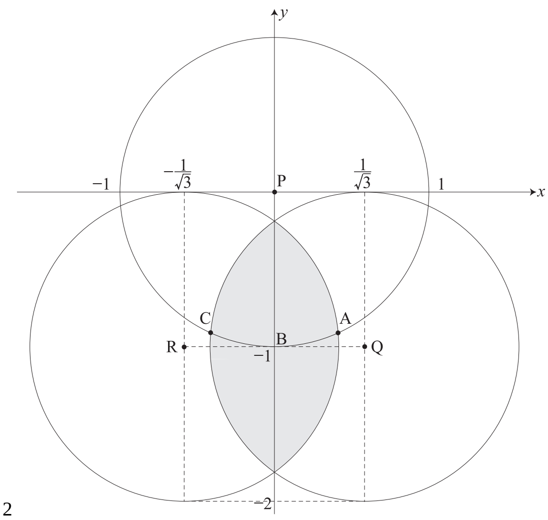
$$\therefore\ \max.\left(\mathrm{OQ}^2 + \mathrm{OR}^2\right) = \frac{14}{3} - 4 \times \frac{3+\sqrt{6}}{6} = \frac{8-2\sqrt{6}}{3} \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

【別解】 – 座標設定 –

Pを原点として，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -1\right),\quad \mathrm{R}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -1\right) \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

のように座標を設定する.**(右図)**



$\mathrm{O}(x_0,\ y_0)$ を中心とする半径 1 の円周上に Pがあり，
同じ円の内部または周上に Q, Rがあるので，

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 = 1\ \wedge\ \left(x_0 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (y_0+1)^2 \leq 1 \qquad \cdots\cdots(3.14)$$

即ち，**太線部**を Oが動くとき，

$$\begin{aligned}&\mathrm{OQ}^2 + \mathrm{OR}^2 = \left(x_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (y_0+1)^2 + \left(x_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (y_0+1)^2 \\ &\iff \mathrm{OQ}^2 + \mathrm{OR}^2 = 2x_0{}^2 + 2(y_0+1)^2 + \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(3.15)\end{aligned}$$

の最大値と最小値を求めればよい.
ここで，$x_0{}^2 + (y_0+1)^2$ が $\mathrm{B}(0,\ -1)$ と Oとの距離の 2 乗を表すことから，

$$\mathrm{A}\left(\frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6},\ -\frac{3+\sqrt{6}}{6}\right),\quad \mathrm{C}\left(\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6},\ -\frac{3+\sqrt{6}}{6}\right) \qquad \cdots\cdots(3.16)$$

を考慮して，

$$0 \leq x_0{}^2 + (y_0+1)^2 \leq \left(\frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{6}}{3} \qquad \cdots\cdots(3.17)$$

(3.15), (3.17) により，

$$\frac{2}{3} \leq \mathrm{OQ}^2 + \mathrm{OR}^2 \leq \frac{8-2\sqrt{6}}{3} \qquad \cdots\cdots(3.17)$$

【20.4】

n を正の整数，a を実数とする．
すべての整数 m に対して，

$$m^2-(a-1)m+\frac{n^2}{2n+1}a>0 \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

が成り立つような a の値の範囲を n を用いて表せ．

【解答】

(4.1) を同値変形して，

$$m^2+m>a\left(m-\frac{n^2}{2n+1}\right) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

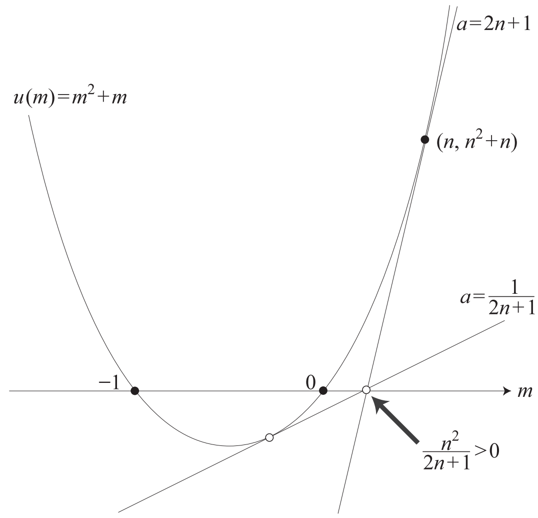
このとき，

$$u(m)=m^2+m,\quad v(m)=a\left(m-\frac{n^2}{2n+1}\right) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

のグラフの上下関係を考察する．
$u(m)$, $v(m)$ が接するための条件は，

$$m^2-(a-1)m+\frac{n^2}{2n+1}a=0 \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

の判別式 D に対して，



$$(a-1)^2-\frac{4n^2}{2n+1}a=0 \iff a^2-2\left(1+\frac{2n^2}{2n+1}\right)a+1=0$$

$$\iff a^2-\left(2n+1+\frac{1}{2n+1}\right)a+1=0 \iff \left(a-(2n+1)\right)\left(a-\frac{1}{2n+1}\right)=0 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

従って，$u(m)>v(m)$ を満たす a の範囲は，

$$(0<)\ \frac{1}{2n+1}<a<2n+1 \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

更に，$a=2n+1$ のとき方程式 (4.4) は，

$$m^2-2nm+n^2=0 \iff (m-n)^2=0 \iff m=n \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

であるから接点 $(n,\ n^2+n)$ は格子点であり，$(-1,\ 0)$, $(0,\ 0)$ も格子点であることに注意すれば，
(4.1) を成り立たせる a の値の範囲は，

$$0<a<2n+1 \qquad \cdots\cdots(4.8)$$