【21.1】

三角形の各辺の長さを a, b, c とし，$a+b+c=2s$ と表すとき，

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c} \geqq 6 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

なる不等式の成立を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【解答】

(1.1) の左辺において，

$$s-a=A \ \wedge \ s-b=B \ \wedge \ s-c=C \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

と置けば，三角形の構成条件 (**三角不等式**) により，

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{2}(b+c-a)>0 \\ B=\dfrac{1}{2}(c+a-b)>0 \\ C=\dfrac{1}{2}(a+b-c)>0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

が成り立つ．

ここで，(1.2) の辺々の和をとり，

$$3s-(a+b+c)=A+B+C \iff s=A+B+C \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

このとき，相加相乗平均の不等式により，

$$\begin{aligned} \frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c} &= \frac{s-A}{A}+\frac{s-B}{B}+\frac{s-C}{C} \\ &= \frac{B+C}{A}+\frac{C+A}{B}+\frac{A+B}{C} \\ &= \left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\right)+\left(\frac{C}{B}+\frac{B}{C}\right)+\left(\frac{A}{C}+\frac{C}{A}\right) \geqq 2\times 3=6 \end{aligned}$$

即ち，

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c} \geqq 6 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

が成り立ち，(1.1) の等号成立条件は，

$$\begin{aligned} \frac{B}{A}=\frac{A}{B} \ \wedge \ \frac{C}{B}=\frac{B}{C} \ \wedge \ \frac{A}{C}=\frac{C}{A} &\iff A^2=B^2=C^2 \\ &\iff A=B=C \quad \big(\because\ (1.3)\big) \\ &\iff s-a=s-b=s-c \quad \big(\because\ (1.2)\big) \\ &\iff a=b=c \qquad \cdots\cdots(1.5) \end{aligned}$$

【21.2】

xyz 空間内に面積 1 の三角形 ABC を置き，この三角形を

平面 $z=0$ に正射影してできる図形の面積を S_1,

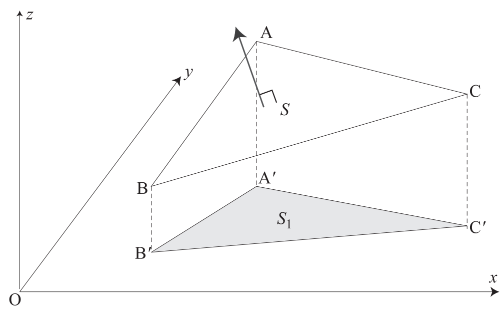
平面 $x=0$ に正射影してできる図形の面積を S_2,

平面 $y=0$ に正射影してできる図形の面積を S_3

とするとき，$S_1+S_2+S_3$ の最大値を求めよ．

【解答】

三角形 ABC の定める平面 π の法線ベクトルを



$$\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

と置く．ここで，$|\overrightarrow{n}|=1$ としても一般性を失わない．
このとき，平面 π と xy 平面とのなす角を θ と表せば，
z 軸に平行なベクトル $\overrightarrow{d}=(0,\ 0,\ 1)$ を用いて，

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{d}|}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{d}|}=|c| \quad \left(\because\ |\overrightarrow{n}|=1\right) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

$$\therefore\ \ S_1=S\cos\theta=|c| \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

同様にして，$S_2=|a|$, $S_3=|b|$ が成り立つので，

$$S_1+S_2+S_3=|a|+|b|+|c| \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

一方，Schwarz **の不等式**により，

$$\left(1\times|a|+1\times|b|+1\times|c|\right)^2\leq(1^2+1^2+1^2)\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)$$

$$\Longleftrightarrow\ \ \left(S_1+S_2+S_3\right)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)=3 \quad \left(\because\ |\overrightarrow{n}|=1\right)$$

$$\Longleftrightarrow\ \ S_1+S_2+S_3\leq\sqrt{3} \quad \left(\because\ S_1>0,\ S_2>0,\ S_3>0\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

ここで，(2.5) の等号成立条件は，

$$\left(|a|,\ |b|,\ |c|\right)\ /\!/\ (1,\ 1,\ 1)\ \wedge\ |\overrightarrow{n}|=1 \iff (a,\ b,\ c)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm1,\ \pm1,\ \pm1) \quad (\textbf{複号任意}) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

即ち，求める最大値は $\sqrt{3}$ である．

【別解】 – 座標設定 –

A を座標の原点に置いて一般性を失わない．更に，

$$\mathrm{B}(x_1,\, y_1,\, z_1), \quad \mathrm{C}(x_2,\, y_2,\, z_2) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

と表せば，B, C を xy 平面に正射影した点 B′, C′ の座標は，

$$\mathrm{B}'(x_1,\, y_1,\, 0), \quad \mathrm{C}'(x_2,\, y_2,\, 0) \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

このとき，

$$S_1 = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right| \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

と表せ，同様の計算で，

$$S_2 = \frac{1}{2}\left|y_1z_2 - y_2z_1\right|, \quad S_3 = \frac{1}{2}\left|z_1x_2 - z_2x_1\right| \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

一方，$\triangle\mathrm{ABC} = 1$ より，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sqrt{({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2} = 1\\
&\qquad\iff ({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 = 4\\
&\qquad\qquad\iff (x_1y_2-x_2y_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2 = 4 \qquad \cdots\cdots(2.11)
\end{aligned}$$

が成り立つので，Schwarz **の不等式**により，

$$\begin{aligned}
&\big(1\times|x_1y_2-x_2y_1|+1\times|y_1z_2-y_2z_1|+1\times|z_1x_2-z_2x_1|\big)^2\\
&\qquad\le (1^2+1^2+1^2)\big(|x_1y_2-x_2y_1|^2+|y_1z_2-y_2z_1|^2+|z_1x_2-z_2x_1|^2\big) \qquad \cdots\cdots(2.12)
\end{aligned}$$

(2.12) に (2.9), (2.10), (2.11) を代入して，

$$(2S_1+2S_2+2S_3)^2 \le 3\times 4 \iff (S_1+S_2+S_3)^2 \le 3 \iff S_1+S_2+S_3 \le \sqrt{3} \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

(2.13) の等号は，$S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに限り成立．
従って，求める最大値は $\sqrt{3}$ である．

【21.3】

$n \geq 3$ を正の整数とするとき，半径 1 の円に内接する凸 n 角形の面積の最大値を求めよ.

【解答】

n 角形の内部に円の中心 O を含まない場合，**左図**のように $\mathrm{A_1}'$ をとれば,

$$\triangle \mathrm{A_1A_2A}_n < \triangle \mathrm{A_1}'\mathrm{A_2A}_n \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

即ち，面積最大の n 角形を考えるとき，その内部に O を含む場合を考えればよい. (**右図**)

$$\angle \mathrm{A}_k\mathrm{OA}_{k+1} = \theta_k \ \ (k = 1, 2, \cdots, n-1), \quad \angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_1 = \theta_n \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

と置けば,

$$\begin{cases} 0 < \theta_k < \pi \ \ (k = 1, 2, \cdots, n) & \cdots\cdots(3.3) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 2\pi & \cdots\cdots(3.4) \\ \triangle \mathrm{A}_k\mathrm{OA}_{k+1} = \dfrac{1}{2}\sin\theta_k \ \ (k = 1, 2, \cdots, n-1) & \cdots\cdots(3.5) \\ \triangle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_1 = \dfrac{1}{2}\sin\theta_n & \cdots\cdots(3.6) \end{cases}$$

このとき，関数 $u(x) = \sin x$ は $0 \leq x \leq \pi$ において上に凸であるから,
$0 < \theta_k < \pi \ \ (k = 1, 2, \cdots, n)$ に対して,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(\theta_k) \leq u\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) \iff \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k \leq \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

ここで，n 角形の面積を S_n で表し，(3.4), (3.5), (3.6), (3.7) を用いれば,

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k \leq \frac{n}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

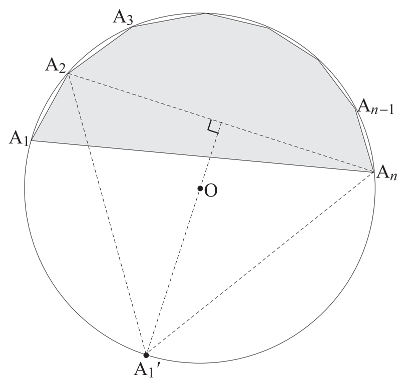
(3.8) の等号成立条件は,

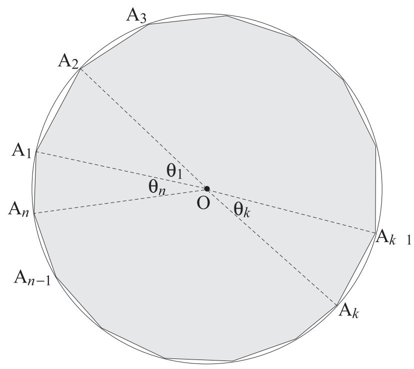
$$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \frac{2\pi}{n} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

(3.8), (3.9) により,

$$\max . S_n = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

このとき，n 角形は正 n 角形である.





– 凸不等式の証明 –

関数 $u(x)$ の区間 $[a,\,b]$ における上方凸性の定義から,

$$u\big((1-t)a+tb\big)\geq(1-t)\,u(a)+t\,u(b) \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

ここで, $0\leq t\leq 1$ であり, (3.11) の等号成立条件は,

$$t=0\ \lor\ t=1\ \lor\ a=b \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

以下, 帰納法により不等式 (3.7) の成立を示す.

ある正整数 $n\geq 2$ と $a\leq x_k\leq b$ $(k=1,2,\cdots,n)$ に対して,

$$u\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\geq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u(x_k) \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

の成立を仮定する. 更に, (3.13) の等号成立が

$$x_1=x_2=\cdots=x_n \qquad \cdots\cdots(3.14)$$

のときに限ることを同時に仮定する.

このとき, $a\leq y_k\leq b$ $(k=1,2,\cdots,n+1)$ に対して,

$$\begin{aligned}u\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}y_k\right)&=u\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}+\frac{1}{n+1}\times y_{n+1}\right)\\&\geq\frac{n}{n+1}\times u\left(\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right)+\frac{1}{n+1}\times u(y_{n+1})\ \ \big(\because\ (3.11)\big)\\&\geq\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u(y_k)+\frac{1}{n+1}u(y_{n+1})\ \ \big(\because\ (3.13)\big)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}u(y_k)\end{aligned}$$

即ち,

$$u\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}y_k\right)\geq\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}u(y_k) \qquad \cdots\cdots(3.15)$$

(3.15) の等号成立は, (3.11), (3.13) の等号が同時に成立するとき, 即ち,

$$\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}=y_{n+1}\ \land\ y_1=y_2=\cdots=y_n\iff y_1=\cdots=y_n=y_{n+1} \qquad \cdots\cdots(3.16)$$

$n=2$ の場合, (3.13) は (3.11) において,

$$a=x_1\ \land\ b=x_2\ \land\ t=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(3.17)$$

として得られるの.

従って, すべての整数 $n\geq 2$ に対して不等式 (3.13) が成立し, その等号条件は (3.14) である.

[Note]

不等式 (3.7) の左辺は, n 角形の重心 G_n の x 座標に対応する曲線 $y=u(x)$ 上の点 P_n の y 座標であり, 右辺は重心 G_n の y 座標である. 一般に, 凸図形の重心はその図形の (境界を含まない) 内部に存在するので, 2 点の y 座標は $y(\mathrm{P}_n)>y(\mathrm{G}_n)$ なる大小関係を保つ. 従って, (3.7) の等号成立条件は, n 個の頂点が 1 点に集まり凸図形が構成できない特殊な場合である. ここで, 各頂点に異なる重みを与えた**加重重心係数**で不等式を書き換えると, 上に凸な関数 $u(x)$ に対して, 次の不等式が成立する.

$$u\left(\sum_{k=1}^{n}t_k\,x_k\right)\geq\sum_{k=1}^{n}t_k\,u(x_k)\ \land\ \sum_{k=1}^{n}t_k=1\ \land\ t_k\geq 0\ \ (k=1,2,\cdots,n) \qquad \cdots\cdots(3.18)$$

【21.4】

$0 \leq x_k \leq \pi\ (k=1, 2, 3, 4)$ とする．

(1) 不等式

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

の成立を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

(2) 不等式

$$\sin\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\sin x_4}{4} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

の成立を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

(3) 不等式

$$\sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3}{3} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

の成立を示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【解答】

(1) 関数 $\sin x$ は $0 \leq x \leq \pi$ において上に凸である．

$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \pi$ として一般性を失わないので，**下図**において，

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

は線分 A_1A_2 の中点 G の y 座標を表し，

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

は曲線 $y=\sin x$ 上の点 P の y 座標を表すので，

● $x_1 < x_2$ のとき，

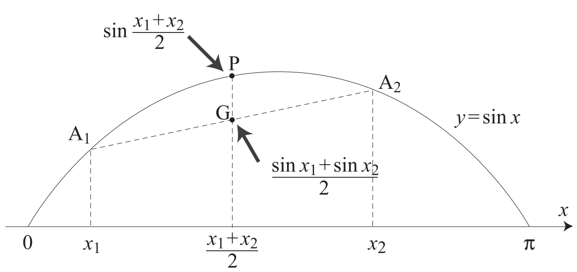
$$\sin\frac{x_1+x_2}{2} > \frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

● $x_1 = x_2$ のとき，

(4.4), (4.5) の値は一致するので，

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(4.6), (4.7) により，(4.1) の成立が示される．



– 和積公式による別解 –

和積公式により,

$$\sin x_1+\sin x_2=2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

このとき,

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(1-\cos\frac{x_1-x_2}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

ここで, $0\leq x_1,\ x_2\leq\pi$ であるから,

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}\geq 0 \quad \left(\because\ 0\leq\frac{x_1+x_2}{2}\leq\pi\right) \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.9), (4.10) により,

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}\geq 0 \iff \sin\frac{x_1+x_2}{2}\geq\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

ここで, (4.1) の等号条件は,

$$\begin{aligned}\sin\frac{x_1+x_2}{2}=0 \ \vee\ \cos\frac{x_1-x_2}{2}=1 &\iff x_1+x_2=0 \ \vee\ x_1+x_2=2\pi \ \vee\ x_1=x_2\\ &\iff x_1=x_2=0 \ \vee\ x_1=x_2=\pi \ \vee\ x_1=x_2\\ &\iff x_1=x_2 \qquad \cdots\cdots(4.11)\end{aligned}$$

(2) (1) の結果により,

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}\geq\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} \ \wedge\ \sin\frac{x_3+x_4}{2}\geq\frac{\sin x_3+\sin x_4}{2} \quad (\because\ 0\leq x_3,\ x_4\leq\pi) \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

(4.12) の不等式の左辺の和に対して (4.1) を適用して,

$$\sin\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\geq\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x_1+x_2}{2}+\sin\frac{x_3+x_4}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}+\frac{\sin x_3+\sin x_4}{2}\right)$$

$$\therefore\ \sin\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\geq\frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\sin x_4}{4} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

ここで, (4.2) の等号条件は,

$$x_1=x_2 \ \wedge\ x_3=x_4 \ \wedge\ \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_3+x_4}{2} \iff x_1=x_2=x_3=x_4 \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

(3) 不等式 (4.2) において,

$$x_4=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

と置けば, $0\leq x_4\leq\pi$ であるから,

$$\begin{aligned}&\sin\frac{x_1+x_2+x_3+\frac{x_1+x_2+x_3}{3}}{4}\geq\frac{1}{4}\left(\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\\ &\iff 4\sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geq\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\\ &\iff \sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geq\frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3}{3} \qquad \cdots\cdots(4.3)\end{aligned}$$

ここで, (4.3) の等号条件は,

$$x_1=x_2=x_3=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \iff x_1=x_2=x_3 \qquad \cdots\cdots(4.15)$$