【22.1】

次の命題 $\mathrm{P}(n)$ を n に関する帰納法で証明せよ.

$\mathrm{P}(n)$: x の n 次式 $f(x)$ に対して,

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(n)$$

がすべて整数のとき, 任意の整数 m に対して $f(m)$ は整数である.

【解答】 – 差分, 帰納法 –

ある正整数 n に対して命題 $\mathrm{P}(n)$ の成立を仮定する.

更に, ある $n+1$ 次式 $g(x)$ に対して,

$$g(0),\, g(1),\, \cdots,\, g(n),\, g(n+1) : \text{整数} \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

を仮定するとき,

$$g(x+1)-g(x)=f(x) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

によって $f(x)$ を定めれば, $f(x)$ は n 次の整式であり,

$$\begin{cases} f(0)=g(1)-g(0) & : \text{整数} \\ f(1)=g(2)-g(1) & : \text{整数} \\ \quad\vdots & \\ f(n)=g(n+1)-g(n) & : \text{整数} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

がすべて成り立つので, 帰納法の仮定により,

$$f(m) : \text{整数} \quad (\forall m : \text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

更に,

$$\begin{cases} g(n+2)=g(n+1)+f(n+1) : \text{整数} & \big(\because\ (1.1)\wedge(1.4)\big) \\ g(n+3)=g(n+2)+f(n+2) : \text{整数} & \big(\because\ (\textbf{上式})\wedge(1.4)\big) \\ g(n+4)=g(n+3)+f(n+3) : \text{整数} & \big(\because\ (\textbf{上式})\wedge(1.4)\big) \\ \qquad\vdots & \end{cases}$$

が成り立ち, 以降帰納的に

$$g(N) : \text{整数} \quad (N=0,1,\cdots,n,n+1,n+2,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

が結論できる.

更に, (1.2) により,

$$\begin{cases} g(-1)=g(0)-f(-1) : \text{整数} & \big(\because\ (1.1)\wedge(1.4)\big) \\ g(-2)=g(-1)-f(-2) : \text{整数} & \big(\because\ (\textbf{上式})\wedge(1.4)\big) \\ g(-3)=g(-2)-f(-3) : \text{整数} & \big(\because\ (\textbf{上式})\wedge(1.4)\big) \\ \qquad\vdots & \end{cases}$$

が成り立ち, 以降帰納的に

$$g(N) : \text{整数} \quad (N=-1,-2,-3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

が結論できるので, (1.5), (1.6) により,

$$g(m) : \text{整数} \quad (\forall m : \text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

即ち, 命題 $\mathrm{P}(n+1)$ が成り立つ.

更に，$f(x)=ax+b$ に対して，

$$f(0),\ f(1):\text{整数} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

を仮定すれば，

$$b=f(0):\text{整数}\ \wedge\ a=f(1)-f(0):\text{整数} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

が成り立つので，

$$f(m)=am+b:\text{整数} \quad (\forall m:\text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

が結論でき，命題 $\mathrm{P}(1)$ が成り立つ．
以上により帰納法が完結し，命題 $\mathrm{P}(n)$ の成立が結論できる．

【別解】 – 基底 –

正整数 $n\geq 1$ に対して，条件

$$f(0),\ f(1),\ \cdots,\ f(n):\text{整数} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

を満たす n 次の整式 $f(x)$ を係数 a_k $(0\leq k\leq n)$ を適当に選ぶことにより，

$$f(x)=a_n\times\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{n!}+a_{n-1}\times\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-2))}{(n-1)!}+\cdots$$
$$\cdots+a_k\times\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(k-1))}{k!}+\cdots+a_2\times\frac{x(x-1)}{2!}++a_1x+a_0 \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

と表すことができる．
このとき，$f(0):\text{整数}$ より，

$$a_0:\textbf{整数} \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

$f(1):\text{整数}$ より，

$$a_1+a_0:\text{整数} \qquad \therefore\ a_1:\textbf{整数} \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

$f(2):\text{整数}$ より，

$$a_2+2a_1+a_0:\text{整数} \qquad \therefore\ a_2:\textbf{整数} \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

そこで，

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_k:\text{整数} \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

を仮定すると，$f(k+1):\text{整数}$ より，

$$a_{k+1}+{}_{k+1}\mathrm{C}_1\cdot a_k+{}_{k+1}\mathrm{C}_2\cdot a_{k-1}+\cdots+{}_{k+1}\mathrm{C}_{k-1}\cdot a_2+{}_{k+1}\mathrm{C}_k\cdot a_1+{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}\cdot a_0:\text{整数} \qquad \cdots\cdots(1.17)$$

即ち，

$$a_{k+1}:\textbf{整数} \qquad \cdots\cdots(1.18)$$

従って，帰納法により，

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n:\textbf{整数} \qquad \cdots\cdots(1.19)$$

このとき，任意の正整数 $m\geq n+1$ に対して，

$$f(m)={}_m\mathrm{C}_n\cdot a_n+{}_m\mathrm{C}_{n-1}\cdot a_{n-1}+\cdots+{}_m\mathrm{C}_k\cdot a_k+\cdots+{}_m\mathrm{C}_2\cdot a_2+{}_m\mathrm{C}_1\cdot a_1+{}_m\mathrm{C}_0\cdot a_0:\text{整数} \qquad \cdots\cdots(1.20)$$

また，任意の負整数 $-m\leq -1$ に対して，

$$f(-m)=(-1)^n{}_{m+n-1}\mathrm{C}_n\cdot a_n+(-1)^{n-1}{}_{m+n-2}\mathrm{C}_{n-1}\cdot a_{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^k{}_{m+k-1}\mathrm{C}_k\cdot a_k++(-1)^2{}_{m+1}\mathrm{C}_2\cdot a_2+(-1)_m\mathrm{C}_1\cdot a_1+a_0:\text{整数} \qquad \cdots\cdots(1.21)$$

従って，(1.11), (1.20), (1.21) により，

$$f(m):\textbf{整数} \quad (\forall m:\text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.22)$$

【22.2】

整数 $k \geq 2$ に対して，

$$f_k(x) = x^k - kx + k - 1 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

と定める．このとき，次の (1) および (2) を示せ．

(1) n 次の整式 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるためには，$g(x)$ が定数 $a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ を用いて，

$$g(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k\, f_k(x) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

の形に表されることが必要十分である．

(2) n 次の整式 $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるためには，$g(x)$ が定数 $a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ を用いて，

$$g(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k\, f_k(x) \ \wedge\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k = 0 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

の形に表されることが必要十分である．

【解答】

一般に，任意の $n \geq 2$ 次式 $g(x)$ は適当な定数 $a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ b,\ c$ を用いて，

$$g(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k x^k + bx + c \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

と表せる．

(2.4) に (2.1) を代入して，

$$g(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k\, f_k(x) + \sum_{k=2}^{n} a_k(kx - k + 1) + bx + c \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) の一次以下の項をまとめて，

$$\begin{cases} g(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k\, f_k(x) + Bx + C & \cdots\cdots(2.6) \\ B = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\, a_k + b & \cdots\cdots(2.7) \\ C = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (1-k)a_k + c & \cdots\cdots(2.8) \end{cases}$$

また，(2.6) の第 1 次導関数，第 2 次導関数を計算して，

$$g'(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k\, {f_k}'(x) + B \ \wedge\ g''(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k\, {f_k}''(x) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

ここで，(2.1) により，

$${f_k}'(x) = kx^{k-1} - k \ \wedge\ {f_k}''(x) = k(k-1)x^{k-2} \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

(2.1), (2.10) により，

$$f_k(1) = {f_k}'(1) = 0 \ \wedge\ {f_k}''(1) = k(k-1) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

以上の準備の下に (1) および (2) の成立を示す．

(1) $g(x)$ が 2 次式 $(x-1)^2$ で割り切れるための**必要十分条件**は,

$$g(1)=g'(1)=0 \iff \sum_{k=2}^{n} a_k f_k(1)+B+C=0 \ \wedge\ \sum_{k=2}^{n} a_k {f_k}'(1)+B=0$$

$$\iff B+C=0 \ \wedge\ B=0 \quad \bigl(\because\ (2.11)\bigr) \iff B=C=0 \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

即ち,

$$g(x)=\sum_{k=2}^{n} a_k f_k(x) \quad \bigl(\because\ (2.6)\bigr) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2) $g(x)$ が 3 次式 $(x-1)^3$ で割り切れるための**必要十分条件**は,

$$g(1)=g'(1)=g''(1)=0 \iff B=C=0 \ \wedge\ \sum_{k=2}^{n} a_k {f_k}''(1)=0 \quad (\because\ (2.12))$$

$$\iff B=C=0 \ \wedge\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k=0 \quad \bigl(\because\ (2.11)\bigr) \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

即ち,

$$g(x)=\sum_{k=2}^{n} a_k f_k(x) \ \wedge\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k=0 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

【Note】 – 整式の基底 –

任意の $n \geq 1$ 次式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ \ (a_n \neq 0) \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

は，任意に与えた k 次式

$$g_k(x) = b_k(k)\, x^k + b_k(k-1)\, x^{k-1} + \cdots + b_k(1)\, x + b_k(0) = \sum_{j=0}^{k} b_k(j)\, x^j \ \ (b_k(k) \neq 0,\ 1 \leq k \leq n) \qquad \cdots\cdots(2.15)$$

に対して，係数 $c_n,\ c_{n-1},\ \cdots,\ c_1,\ c_0$ を**適当に選べば**,

$$f(x) = c_n\, g_n(x) + c_{n-1}\, g_{n-1}(x) + \cdots + c_1\, g_1(x) + c_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k\, g_k(x) + c_0 \qquad \cdots\cdots(2.16)$$

と**一意的に**表せ，$\{g_k(x)\}_{k=1}^{n}$ を $f(x)$ の**基底** (base) という.

実際，(2.14), (2.16) の n 次の項の係数を比較して,

$$a_n = c_n \times b_n(n) \iff c_n = \frac{a_n}{b_n(n)} \quad \left(\because\ b_n(n) \neq 0\right) \qquad \cdots\cdots(2.17)$$

更に，(2.14), (2.16) の $n-1$ 次の項の係数を比較して,

$$\begin{aligned} &a_{n-1} = c_n \times b_n(n-1) + c_{n-1} \times b_{n-1}(n-1) \\ &\qquad \iff c_{n-1} = \frac{1}{b_{n-1}(n-1)}\left\{a_{n-1} - c_n \cdot b_n(n-1)\right\} \quad \left(\because\ b_{n-1}(n-1) \neq 0\right) \qquad \cdots\cdots(2.18) \end{aligned}$$

ここで，(2.17) により，(2.18) の右辺は,

$$a_n,\ a_{n-1},\ b_n(n),\ b_n(n-1),\ b_{n-1}(n-1)$$

によって一意的に定まる.

更に，(2.14), (2.16) の $n-2$ 次の項の係数を比較して,

$$\begin{aligned} &a_{n-2} = c_n \times b_n(n-2) + c_{n-1} \times b_{n-1}(n-2) + c_{n-2} \times b_{n-2}(n-2) \\ &\iff c_{n-2} = \frac{1}{b_{n-2}(n-2)}\left\{a_{n-2} - c_n \cdot b_n(n-2) - c_{n-1} \cdot b_{n-1}(n-2)\right\} \quad \left(\because\ b_{n-2}(n-2) \neq 0\right) \qquad \cdots\cdots(2.19) \end{aligned}$$

ここで，(2.17), (2.18) により，(2.19) の右辺は,

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ b_n(n),\ b_n(n-1),\ b_n(n-2),\ b_{n-1}(n-1),\ b_{n-1}(n-2),\ b_{n-2}(n-2)$$

によって一意的に定まる.

この操作を繰り返して，$0 \leq k \leq n$ なる k に対して,

$$\begin{aligned} &a_k = c_n \times b_n(k) + c_{n-1} \times b_{n-1}(k) + \cdots + c_{k+1} \times b_{k+1}(k) + c_k \times b_k(k) \\ &\qquad \iff c_k = \frac{1}{b_k(k)}\left\{a_k - c_n \cdot b_n(k) - c_{n-1} \cdot b_{n-1}(k) - \cdots - c_{k+1} \cdot b_{k+1}(k)\right\} \quad \left(\because\ b_k(k) \neq 0\right) \qquad \cdots\cdots(2.20) \end{aligned}$$

ここで，(2.20) の右辺は,

$$a_n,\ \cdots,\ a_k,\ b_n(n),\ \cdots,\ b_n(k),\ b_{n-1}(n-1),\ \cdots,\ b_{n-1}(k),\ \cdots,\ b_{k+1}(k+1),\ b_{k+1}(k)$$

によって一意的に定まる.

即ち，規定の選び方の**任意性**が示された.

そこで，n 次の整式 $f(x)$ を適当な係数 c_k $(k=0,1,\cdots,n)$ によって，

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-(k-1))}{k!}c_k+c_0 \qquad \cdots\cdots(2.21)$$

と表せば，前問の命題 P(n) は以下の要領で示せる．
即ち，条件

$$f(0),\ f(1),\ \cdots,\ f(n):\text{整数} \qquad \cdots\cdots(2.22)$$

により，(2.21) の各係数 c_k $(k=0,1,\cdots,n)$ はすべて整数として定まり，
任意に与えた整数 $m\geq n+1$ に対して，

$$\begin{aligned}f(m)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{m(m-1)(m-2)\times\cdots\times(m-(k-1))}{k!}c_k+c_0\\&=\sum_{k=1}^{n}{}_m\mathrm{C}_k\,c_k+c_0:\text{整数}\quad\left(\because\ m\geq n+1\right)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2.23)$$

更に，任意の整数 $-m\leq -1$ に対して，

$$\begin{aligned}f(-m)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-m)(-m-1)(-m-2)\times\cdots\times(-m-(k-1))}{k!}c_k+c_0\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k{}_{m+k-1}\mathrm{C}_k\,c_k+c_0:\text{整数}\quad\left(\because\ m\geq 1\right)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2.24)$$

が示せるので，(2.22), (2.23), (2.24) により，

$$f(N):\text{整数}\quad(\forall N:\text{整数}) \qquad \cdots\cdots(2.25)$$

が結論できる．**(詳細は前問別解を参照)**

【22.3】

$f_n(z)=z^n+\dfrac{1}{z^n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ と定義し，$x=z+\dfrac{1}{z}$ と置く．

(1) $f_n(z)$ は x の整数係数の n 次式であることを示せ．

以下，$f_n(z)$ の x^{n-k} の係数を $a_n(k)$ で表す．即ち，$f_n(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_n(k)x^{n-k}$ である．

(2) すべての偶数 n に対して，$a_n(n)$ を求めよ．

(3) すべての正整数 n および $0<k\leq n$ なるすべての奇数 k に対して，$a_n(k)=0$ を示せ．

【解答】

まず，関数列 $\{f_n(z)\}$ の隣接番号間の関係を求める．

$$f_{n+1}(z)=z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}=\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)-\left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)=x\,f_n(z)-f_{n-1}(z)\quad(n=2,3,4,\cdots)$$

より，

$$f_{n+2}(z)=x\,f_{n+1}(z)-f_n(z)\quad(n=1,2,3,\cdots)\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

(1) ある番号 $n\geq 1$ に対して，

$$f_n(z)=(x\text{ の整数係数の }n\text{ 次式})\ \wedge\ f_{n+1}(z)=(x\text{ の整数係数の }n+1\text{ 次式})\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

であることを仮定する．

このとき，(3.1) により，

$$f_{n+2}(z)=(x\text{ の整数係数の }n+2\text{ 次式})\qquad\cdots\cdots(3.3)$$

であることは明らかである．

また，

$$f_1(z)=z+\frac{1}{z}=x,\quad f_2(z)=z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2=x^2-2\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

より，

$$f_1(z)=(x\text{ の整数係数の 1 次式})\ \wedge\ f_2(z)=(x\text{ の整数係数の 2 次式})\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

であるので，(3.2), (3.3), (3.4) により帰納的に題意は成立する．

(2) (3.1) により，$f_n(z)$ の定数項 $a_n(n)$ に対して，

$$a_{n+2}(n+2)=0\times a_{n+1}(n+1)-a_n(n)\iff a_{n+2}(n+2)=-a_n(n)\qquad\cdots\cdots(3.6)$$

が成り立ち，数列 $\{a_n(n)\}$ は 2 項ごとに公比 -1 の等比数列である．

また，(3.4) により，$a_2(2)=-2$ であるから，(3.6) により，

$$a_{2m}(2m)=(-1)^{m-1}\times(-2)=(-1)^m\cdot 2\quad(m=1,2,3,\cdots)\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

即ち，

$$a_n(n)=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot 2\quad(n:\text{even})\qquad\cdots\cdots(3.8)$$

(3) (3.1) における各項の係数間の関係を調べる．

$$f_{n+2}(z) = a_{n+2}(0)\,x^{n+2} + a_{n+2}(1)\,x^{n+1} + a_{n+2}(2)\,x^{n} + \cdots + a_{n+2}(n+1)\,x + a_{n+2}(n+2) \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

$$x\,f_{n+1}(z) = a_{n+1}(0)\,x^{n+2} + a_{n+1}(1)\,x^{n+1} + a_{n+1}(2)\,x^{n} + \cdots + a_{n+1}(n+1)\,x \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

$$f_{n}(z) = a_{n}(0)\,x^{n} + \cdots + a_{n}(n-1)\,x + a_{n}(n) \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

ここで，$n = 1, 2, 3, \cdots$ である．

• 任意の番号 n に対して，$a_n(1) = 0$ を示す．

(3.1), (3.9), (3.10), (3.11) により，

$$a_{n+2}(1) = a_{n+1}(1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

ここで，(3.4) により，$a_1(1) = a_2(1) = 0$ であるから，(3.12) により帰納的に，

$$0 = a_1(1) = a_2(1) = a_3(1) = \cdots = a_n(1) = \cdots \quad (n = 2, 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

• 任意の奇数 n に対して，$a_n(n) = 0$ を示す．

(3.6) により，

$$a_{n+2}(n+2) = -a_n(n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

ここで，(3.4) により，$a_1(1) = 0$ であるから，(3.6) により帰納的に，

$$0 = a_1(1) = a_3(3) = \cdots = a_{2m-1}(2m-1) = \cdots \quad (m = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.14)$$

• 任意の番号 n と奇数 k $(1 < k < n)$ に対して，$a_n(k) = 0$ を示す．

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
1	0									
2	0									
3	0		0							
4	0		0							
5	0				0					
6	0									
7	0						0			
8	0									
9	0								0	
$\vdots$										

(3.13) により，右表の第 1 列はすべて 0 である．

これと (3.1), (3.9), (3.10), (3.11) による漸化式

$$a_{n+2}(k) = a_{n+1}(k) - a_n(k-2) \quad (2 \leq k \leq n+1) \qquad \cdots\cdots(3.15)$$

により，

$$\begin{cases} a_4(3) = a_3(3) - a_2(1) = 0 - 0 = 0 \\ a_5(3) = a_4(3) - a_3(1) = 0 - 0 = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

以下，帰納的に，

$$a_n(3) = 0 \quad (n = 3, 4, 5, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.16)$$

が導けるので，右表の第 3 列はすべて 0 である．

次に，右表の第 5 列についても同様にして，

$$\begin{cases} a_6(5) = a_5(5) - a_4(3) = 0 - 0 = 0 \\ a_7(5) = a_6(5) - a_5(3) = 0 - 0 = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

以下，帰納的に，

$$a_n(5) = 0 \quad (n = 5, 6, 7, \cdots) \qquad \cdots\cdots(3.17)$$

が導けるので，右表の第 5 列はすべて 0 である．

この操作を繰り返すことにより，すべての番号 n とすべての奇数 k $(0 < k \leq n)$ に対して，

$$a_n(k) = 0 \quad (k : \mathrm{odd} \wedge 0 < k \leq n) \qquad \cdots\cdots(3.18)$$

が成り立つので題意は示された．

【Note】 – (3) 別解 –

初期値 (3.4) より，

$$f_1(z)=x,\quad f_2(z)=x^2-2 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

ここで，漸化式 (3.1) を繰り返し用いて，

$$\begin{gathered}
f_3(z)=x\,f_2(z)-f_1(z)=x^3-2x-x=x^3-3x \\
f_4(z)=x\,f_3(z)-f_2(z)=x^4-3x^2-(x^2-2)=x^4-4x^2+2 \\
f_5(z)=x\,f_4(z)-f_3(z)=x^5-4x^3+2x-(x^3-3x)=x^5-5x^3+5x \\
f_6(z)=x\,f_5(z)-f_4(z)=x^6-5x^4+5x^2-(x^4-4x^2+2)=x^6-6x^4+9x^2-2 \\
f_7(z)=x\,f_6(z)-f_5(z)=x^7-6x^5+9x^3-2x-(x^5-5x^3+5x)=x^7-7x^5+14x^3-7x \\
\vdots
\end{gathered}$$

この実験により，x の整式 $f_n(z)$ は，

$$\begin{cases} n\text{ が奇数のとき，}f_n(z)\text{ は }n\text{ 次の奇関数} \\ n\text{ が偶数のとき，}f_n(z)\text{ は }n\text{ 次の偶関数} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3.19)$$

であることが予想される．
即ち，(3) の命題 $a_n(k)=0$ (k : odd) は，(3.19) と同値である．
そこで，ある番号 n に対して，

$$n:\text{odd} \wedge f_n(z):\text{奇関数} \wedge f_{n+1}(z):\text{偶関数} \qquad \cdots\cdots(3.20)$$

を仮定すると，漸化式 (3.1) により，

$$f_{n+2}(z)=x\times(x\text{ の }n+1\text{ 次の偶関数})-(x\text{ の }n\text{ 次の奇関数})=(x\text{ の }n+2\text{ 次の奇関数}) \qquad \cdots\cdots(3.21)$$

更に，

$$f_{n+3}(z)=x\times(x\text{ の }n+2\text{ 次の奇関数})-(x\text{ の }n+1\text{ 次の偶関数})=(x\text{ の }n+3\text{ 次の偶関数}) \qquad \cdots\cdots(3.22)$$

従って，(3.4) と (3.21)∧(3.22) により帰納法が完結し，(3.19) が成り立つので，

$$a_n(k)=0\ \ (k:\text{odd},\ 0\leq k\leq n)$$

が示されることになる．
当然，前頁の二変数帰納法による証明より，上の証明の方が見通しがよい．

【**Note**】 **– Chebysev の多項式 –**

複素数 z に対して，$z=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta$ とおけば，

$$x=z+\frac{1}{z}=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta+\frac{1}{\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta}=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta+\cos\theta-\mathbf{i}\sin\theta=2\cos\theta \qquad \cdots\cdots(3.23)$$

また，ある正整数 n に対して，

$$z^n=\cos n\theta+\mathbf{i}\sin n\theta \qquad \cdots\cdots(3.24)$$

を仮定すると，

$$\begin{aligned}z^{n+1}&=(\cos n\theta+\mathbf{i}\sin n\theta)(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)\\&=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta+\mathbf{i}(\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta)\\&=\cos(n+1)\theta+\mathbf{i}\sin(n+1)\theta \qquad \cdots\cdots(3.25)\end{aligned}$$

従って，(3.24) は一般の正整数 n に対して成り立つので，

$$f_n(z)=z^n+\frac{1}{z^n}=\cos n\theta+\mathbf{i}\sin n\theta+\frac{1}{\cos n\theta+\mathbf{i}\sin n\theta}=2\cos n\theta \qquad \cdots\cdots(3.25)$$

(3.23), (3.25) により，

$$\begin{aligned}2\cos 2\theta&=f_2(z)=(2\cos\theta)^2-2 \iff \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1\\2\cos 3\theta&=f_3(z)=(2\cos\theta)^3-3(2\cos\theta) \iff \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta\\2\cos 4\theta&=f_4(z)=(2\cos\theta)^4-4(2\cos\theta)^2+2 \iff \cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+2\\2\cos 5\theta&=f_5(z)=(2\cos\theta)^5-5(2\cos\theta)^3+5(2\cos\theta) \iff \cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta\\&\vdots\end{aligned}$$

即ち，$\cos\theta$ の整式 $f_n(z)$ から n 倍角公式が得られる．
この観点で予習教材 [Review 22.3.3] を見ると，出題者の意図が分かる．
因みに，

$$(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathbf{i}\sin n\theta \qquad \cdots\cdots(3.26)$$

を de Moivre **の公式**といい，n は正負，0 のすべての整数で成り立つ．

【22.4】

$f(x)$ を $n \geq 1$ 次以下の整式とする.
異なる $n+1$ 個以上の実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n+1},\ \cdots$ に対して,

$$f(a_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n+1, \cdots)$$

が成り立つとき，すべての実数 x について恒等的に

$$f(x) = 0 \quad (\forall x)$$

であることを示せ.

【解答】

$k = 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$f(a_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

が成り立つので，**因数定理**により,

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \times \cdots \times (x - a_n) g(x) \quad (g(x) : \text{整式}) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

と表せるが，$\deg . f(x) \leq n$ であるから,

$$\deg . g(x) = 0 \iff g(x) = C\ (\textbf{定数}) \quad (\forall x) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

であることが**必要**.
更に，題意より,

$$f(a_{n+1}) = 0 \ \wedge \ a_{n+1} \neq a_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

が成り立つので，(4.2), (4.3), (4.4) により,

$$0 = f(a_{n+1}) = C\,(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2) \times \cdots \times (a_{n+1} - a_n) \iff C = 0 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

従って，(4.2), (4.3), (4.5) により,

$$f(x) = 0 \quad (\forall x) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(4.6) のとき，$a_k\ (k = n+2, \cdots)$ に対して,

$$f(a_k) = 0 \quad (k = n+2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

となるので，(4.6) は題意成立のための**必要十分条件**である.

【Note】 – 代数学の基本定理 –

「n 次方程式 $f(x) = 0$ は，重複を込めて丁度 n 個の解を持つ」

本問はこの定理の**対偶命題**である．即ち,
「n 次の等式 $f(x) = 0$ が異なる $n+1$ 個以上の値 $a_k\,(k = 1, 2, \cdots, n+1, \cdots)$ に対して,
$f(a_k) = 0$ となるならば，等式 $f(x) = 0$ は (任意の x に対して成り立つ) 恒等式である」

方程式 $\cdots\cdots$ **特定の値**に対して成り立つ等式
恒等式 $\cdots\cdots$ **任意の値**に対して成り立つ等式

【**Note**】

$n=2$ の場合，因数定理を用いない以下の証明もできる;

2 次以下の整式

$$f(x)=Ax^2+Bx+C$$

が異なる 3 個以上の実数 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ に対して，

$$f(a_k)=0 \quad (k=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

を満たすとき，

$$\begin{cases} A{a_1}^2+Ba_1+C=0 & \cdots\cdots(4.11) \\ A{a_2}^2+Ba_2+C=0 & \cdots\cdots(4.12) \\ A{a_3}^2+Ba_3+C=0 & \cdots\cdots(4.13) \end{cases}$$

の成立が必要.

(4.11), (4.12) により，

$$A({a_1}^2-{a_2}^2)+B(a_1-a_2)=0 \iff A(a_1+a_2)+B=0 \quad \left(\because\ a_1\neq a_2\right) \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

同様に，(4.12), (4.13) より，

$$A(a_2+a_3)+B=0 \qquad \cdots\cdots(4.15)$$

(4.14), (4.15) により，

$$A(a_1-a_3)=0 \iff A=0 \quad \left(\because\ a_3\neq a_1\right) \qquad \cdots\cdots(4.16)$$

$A=0$ を (4.15) に代入して，$B=0$ が得られ，

$A=B=0$ を (4.11) に代入して，$C=0$ が得られるので，

$$f(x)=0\cdot x^2+0\cdot x+0=0\ \ (\forall x:\text{実数}) \qquad \cdots\cdots(4.17)$$

(4.17) は題意成立の必要十分条件である.

$f(x)$ の係数の値 $(=0)$ を決定するこの方法は，一般の次数 n では少々手間が掛かる.
具体的には，次数 n に関する帰納法を用い，最高次の項の係数から値 $(=0)$ を決定していく.