【23.1】

関数 $u(x)$ はすべての整数で定義された関数で，次の条件を満たす．

$$\begin{cases} u(2)=\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots(1.1) \\ u(m+n)\leq \max\bigl(u(m),\ u(n)\bigr) & \cdots\cdots(1.2) \\ u(mn)=u(m)\,u(n) & \cdots\cdots(1.3) \end{cases}$$

(1) $u(1)$, $u(-1)$ を求めよ．

(2) すべての整数 n に対して，$u(n)\leq 1$ であることを示せ．

(3) すべての整数 n に対して，$u(2n+1)=1$ であることを示せ．

【解答】

(1) (1.3) に $m=n=1$ を代入して，

$$u(1)=u(1)\cdot u(1) \iff u(1)=0 \vee u(1)=1 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

$u(1)=0$ のとき，(1.3) により，

$$u(2)=u(2)\cdot u(1)=0 \left(\neq \frac{1}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

となり，(1.1) に矛盾する．

$$\therefore\ u(1)=1 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

更に，(1.3) に $m=n=-1$ を代入して，

$$1=u(1)=u(-1)\cdot u(-1) \iff \{u(-1)\}^2=1 \iff u(-1)=\pm 1 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

また，(1.2) に $m=2$, $n=-1$ を代入して，

$$1=u(2+(-1))\leq \max\bigl(u(2),\ u(-1)\bigr)=\max\left(\frac{1}{2},\ u(-1)\right) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

即ち，$1\leq u(-1)$ である．

$$\therefore\ u(-1)=1 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

(2) (1.3) に $m=2$, $n=0$ を代入して，

$$u(0)=u(2)\cdot u(0)=\frac{1}{2}\times u(0) \iff u(0)=0 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

そこで，ある整数 $n\geq 0$ に対して，

$$u(n)\leq 1 \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

を仮定すると，(1.2) により，

$$u(n+1)\leq \max\bigl(u(n),\ u(1)\bigr)=1 \quad \bigl(\because\ u(1)=1\bigr) \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

更に，ある整数 $n\leq 0$ に対して (1.11) を仮定すると，

$$u(n-1)\leq \max\bigl(u(n),\ u(-1)\bigr)=1 \quad \bigl(\because\ u(-1)=1\bigr) \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

(1.10), (1.11), (1.12), (1.13) により帰納法は完結し，すべての整数 n に対して，

$$u(n)\leq 1 \quad (\forall n : \text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

(3) (1.2) より，任意の整数 n に対して，

$$u(2n+1) \leq \max\bigl(u(2n),\, u(1)\bigr) = \max\left(\frac{1}{2} \times u(n),\, 1\right) = 1 \quad \bigl(\because\ u(1) = 1,\, u(n) \leq 1\bigr)$$

即ち，

$$u(2n+1) \leq 1 \quad \bigl(\forall n : 整数\bigr) \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

更に，任意の整数 n に対して，

$$u(1) \leq \max\bigl(u(2n+1),\, u(-2n)\bigr) = \max\left(u(2n+1),\, \frac{1}{2} \times u(-n)\right)$$

即ち，

$$1 \leq u(2n+1) \quad \bigl(\forall n : 整数\bigr) \qquad \cdots\cdots(1.16)$$

(1.15), (1.16) により，

$$u(2n+1) = 1 \quad \bigl(\forall n : 整数\bigr) \qquad \cdots\cdots(1.17)$$

【23.2】

3 次方程式 $u(x)=0$ は次の条件を満たす;

$$u(x)=0 \text{ は異なる解 } a,\,b,\,c \text{ を持ち，} a^2,\,b^2,\,c^2 \text{ もまた } u(x)=0 \text{ の異なる解である}$$

このとき，$u(x)$ をすべて求めよ．

【解答】　– 解と係数の関係 –

$u(x)=x^3+px^2+qx+r$ として一般性を失わない．

題意より，

$$x^3+px^2+qx+r=(x-a)(x-b)(x-c)=\bigl(x-a^2\bigr)\bigl(x-b^2\bigr)\bigl(x-c^2\bigr) \qquad \cdots\cdots(2.0)$$

(2.0) の係数を比較して，

$$\begin{cases} a+b+c=a^2+b^2+c^2=-p & \cdots\cdots(2.1) \\ ab+bc+ca=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q & \cdots\cdots(2.2) \\ abc=a^2b^2c^2=-r & \cdots\cdots(2.3) \end{cases}$$

(2.3) より $a,\,b,\,c$ を消去して，

$$r^2+r=0 \iff \begin{cases} r=0 & \cdots\cdots(2.4) \\ r=-1 & \cdots\cdots(2.5) \end{cases}$$

また，恒等式

$$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2 \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

を用いて，(2.1) より $a,\,b,\,c$ を消去して，

$$(-p)^2-2q=-p \quad \bigl(\because\ ab+bc+ca=q\bigr) \iff p^2+p-2q=0 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

更に，恒等式

$$(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

を用いて，(2.2) より $a,\,b,\,c$ を消去して，

$$q^2-2pr=q \quad \bigl(\because\ a+b+c=-p,\ abc=-r\bigr) \iff q^2-q-2pr=0 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.4) ∧ (2.9) により，

$$q^2-q=0 \iff \begin{cases} q=0 & \cdots\cdots(2.10) \\ q=1 & \cdots\cdots(2.11) \end{cases}$$

(2.7) ∧ (2.10) により，

$$p^2+p=0 \iff p=0 \ \vee\ p=-1 \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

(2.7) ∧ (2.11) により，

$$p^2+p-2=0 \iff p=-2 \ \vee\ p=1 \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

以上により，

$$(p,\,q,\,r)=(0,\,0,\,0),\ (-1,\,0,\,0),\ (-2,\,1,\,0),\ (1,\,1,\,0) \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

即ち，

$$u(x)=x^3,\ x^3-x^2,\ x^3-2x^2+x,\ x^3+x^2+x \qquad \cdots\cdots(2.15)$$

(2.15) に対応する解は，

$$0\ (\textbf{三重根}),\quad 1,\,0\ (\textbf{二重根}),\quad 0,\,1\ (\textbf{二重根}),\quad 0,\,\omega,\,\overline{\omega} \qquad \cdots\cdots(2.16)$$

従って，題意を満たすのは，

$$u(x)=x^3+x^2+x \qquad \cdots\cdots(2.17)$$

次に，$(2.5) \wedge (2.9)$ により，

$$\begin{cases} q^2 - q + 2p = 0 & \cdots\cdots (2.9)' \\ p^2 + p - 2q = 0 & \cdots\cdots (2.7) \end{cases}$$

両式の差をとって，

$$p^2 - q^2 + p + q - 2(p+q) = 0 \iff (p+q)(p-q-1) = 0 \iff \begin{cases} q = -p & \cdots\cdots (2.18) \\ q = p-1 & \cdots\cdots (2.19) \end{cases}$$

$(2.18) \wedge (2.7)$ により，

$$p^2 + 3p = 0 \iff p = 0 \ \vee \ p = -3 \qquad \cdots\cdots (2.20)$$

$(2.19) \wedge (2.7)$ により，

$$p^2 - p + 2 = 0 \iff p = \frac{1 \pm \sqrt{7}\mathbf{i}}{2} \qquad \cdots\cdots (2.21)$$

以上により，

$$(p,\ q,\ r) = (0,\ 0,\ -1),\ (-3,\ 3,\ -1),\ \left(\frac{1 \pm \sqrt{7}\mathbf{i}}{2},\ \frac{-1 \pm \sqrt{7}\mathbf{i}}{2},\ -1\right) \ (\textbf{複号同順}) \qquad \cdots\cdots (2.22)$$

即ち，

$$u(x) = x^3 - 1,\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1,\ x^3 + \frac{1 \pm \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x^2 + \frac{-1 \pm \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x - 1 \ (\textbf{複号同順}) \qquad \cdots\cdots (2.23)$$

(2.23) に対応する解は，

$$1,\ \omega,\ \overline{\omega},\quad 1\ (\textbf{三重根}),\quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\quad \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6 \qquad \cdots\cdots (2.24)$$

ここで，$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_6$ について調べる．

$$\left(x^3 + \frac{1 + \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x^2 + \frac{-1 + \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x - 1\right) \times \left(x^3 + \frac{1 - \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x^2 + \frac{-1 - \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x - 1\right)$$
$$= \cdots\cdots = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \qquad \cdots\cdots (2.25)$$

により，方程式

$$\begin{cases} u(x) = x^3 + \dfrac{1 + \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x^2 + \dfrac{-1 + \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x - 1 = 0 & \cdots\cdots (2.26) \\ u(x) = x^3 + \dfrac{1 - \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x^2 + \dfrac{-1 - \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x - 1 = 0 & \cdots\cdots (2.27) \end{cases}$$

の解は，6 個の 1 の原始 7 乗根の異なる 3 個ずつの組合わせと考えられる．
そこで，1 の原始 7 乗根を

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{7} \quad (k = 1, 2, \cdots, 6) \qquad \cdots\cdots (2.28)$$

と表せば，$\gcd(7,\ 2) = 1$ であることを考慮して，

$$\{z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_6\} = \left\{{z_1}^2,\ {z_2}^2,\ \cdots,\ {z_6}^2\right\} \qquad \cdots\cdots (2.29)$$

更に，(2.0) から導かれていることに注意すれば，方程式 (2.26), (2.27) の解は，

$$\bigl\{\{z_1,\ z_2,\ z_4\},\ \{z_3,\ z_5,\ z_6\}\bigr\} \quad (\textbf{順不同}) \qquad \cdots\cdots (2.30)$$

従って，題意を満たすのは，

$$u(x) = x^3 - 1,\quad x^3 + \frac{1 \pm \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x^2 + \frac{-1 \pm \sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x - 1 \ (\textbf{複号同順}) \qquad \cdots\cdots (2.31)$$

以上より，求める $u(x)$ は (2.17), (2.31) の 4 通りである．

【別解】 – 未定係数法 –

考え得る $a,\,b,\,c$ と $a^2,\,b^2,\,c^2$ の対応は右表の $6\,(=3!)$ 通りである．

	a^2	b^2	c^2
(1)	a	b	c
(2)	a	c	b
	c	b	a
	b	a	c
(3)	b	c	a
	c	a	b

(1) の場合; $a,\,b,\,c$ は方程式 $x^2=x$ の解であるから，

$$x^2=x \iff x=0 \lor x=1$$

の 2 種類となり，異なる 3 個の $a,\,b,\,c$ は存在しない．

(2) の場合; 右表一行目の対応を考えれば十分なので，

$$a^2=a \land b^2=c \land c^2=b \iff a^2=a \land b^4=b \land c^4=c \land b^2=c \land c^2=b$$
$$\iff \big(a=0 \lor a=1\big) \land \big(b=0 \lor b=1 \lor b=\omega \lor b=\overline{\omega}\big) \land \big(c=0 \lor c=1 \lor c=\omega \lor c=\overline{\omega}\big)$$

題意を満たす組合せは，$b,\,c$ の対称性による重複を除いて，

$$(a,\,b,\,c)=(0,\,\omega,\,\overline{\omega}),\ (1,\,\omega,\,\overline{\omega}) \qquad \cdots\cdots(2.32)$$

このとき，

$$u(x)=\begin{cases}(x-0)(x-\omega)(x-\overline{\omega})=x^3+x^2+x\\(x-1)(x-\omega)(x-\overline{\omega})=x^3-1\end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.33)$$

の二通りが求める $u(x)$ である．

(3) の場合; 上表一行目の対応関係より，

$$a=c^2=(b^2)^2=(a^2)^4=a^8 \qquad \therefore\ a^8=a \land b^8=b \land c^8=c \quad (\because\ \textbf{対称性}) \qquad \cdots\cdots(2.34)$$

(2.34) より，$a,\,b,\,c$ は次の方程式の解であることが必要．

$$x^8=x \iff x(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$
$$\iff x=0 \lor x=1 \lor x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0 \qquad \cdots\cdots(2.35)$$

ここで，$a^2=b\neq a$，同様に，$b^2\neq b,\ c^2\neq c$ であるから，$x=0,\,1$ は条件を満たさない．
即ち，$a,\,b,\,c$ は方程式

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0 \qquad \cdots\cdots(2.36)$$

の 3 解であり，1 の 7 乗根の 6 個の虚数根の内の 3 個と考えられる．
そこで，1 の 7 乗根の 6 個の虚数根を

$$\alpha_k=\cos\frac{2k\pi}{7}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{7} \quad (k=0,\,1,\,\cdots,\,6) \qquad \cdots\cdots(2.37)$$

と表せば，

$$\begin{cases}(\alpha_1)^2=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{7}\right)^2=\cos\frac{4\pi}{7}+\mathbf{i}\sin\frac{4\pi}{7}=\alpha_2\\(\alpha_2)^2=\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\mathbf{i}\sin\frac{4\pi}{7}\right)^2=\cos\frac{8\pi}{7}+\mathbf{i}\sin\frac{8\pi}{7}=\alpha_4\\(\alpha_4)^2=\left(\cos\frac{8\pi}{7}+\mathbf{i}\sin\frac{8\pi}{7}\right)^2=\cos\frac{2\pi}{7}+\mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{7}=\alpha_1\end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.38)$$

が成り立つので，

$$\{a,\,b,\,c\}=\{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_4\} \qquad \cdots\cdots(2.39)$$

同様にして,

$$\begin{cases} (\alpha_3)^2 = \left(\cos\dfrac{6\pi}{7} + \mathbf{i}\sin\dfrac{6\pi}{7}\right)^2 = \cos\dfrac{12\pi}{7} + \mathbf{i}\sin\dfrac{12\pi}{7} = \alpha_6 \\ (\alpha_6)^2 = \left(\cos\dfrac{12\pi}{7} + \mathbf{i}\sin\dfrac{12\pi}{7}\right)^2 = \cos\dfrac{10\pi}{7} + \mathbf{i}\sin\dfrac{10\pi}{7} = \alpha_5 \\ (\alpha_5)^2 = \left(\cos\dfrac{10\pi}{7} + \mathbf{i}\sin\dfrac{10\pi}{7}\right)^2 = \cos\dfrac{6\pi}{7} + \mathbf{i}\sin\dfrac{6\pi}{7} = \alpha_3 \end{cases} \quad \cdots\cdots(2.40)$$

が成り立つので,

$$\{a,\ b,\ c\} = \{\alpha_3,\ \alpha_6,\ \alpha_5\} \quad \cdots\cdots(2.41)$$

(2.39), (2.41) より,

$$u(x) = \begin{cases} (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4) & \cdots\cdots(2.42) \\ (x-\alpha_3)(x-\alpha_3)(x-\alpha_6) & \cdots\cdots(2.43) \end{cases}$$

(2.42) を展開して,

$$\begin{aligned} &(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4) \\ &\quad = x^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)x^2 + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_4+\alpha_4\alpha_1)x - (\alpha_1\alpha_2\alpha_4) \\ &\quad = x^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)x^2 + (\alpha_3+\alpha_6+\alpha_5)x - 1 \quad \cdots\cdots(2.44) \end{aligned}$$

(2.43) を展開して,

$$\begin{aligned} &(x-\alpha_3)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6) \\ &\quad = x^3 - (\alpha_3+\alpha_5+\alpha_6)x^2 + (\alpha_3\alpha_5+\alpha_5\alpha_6+\alpha_6\alpha_3)x - (\alpha_3\alpha_5\alpha_6) \\ &\quad = x^3 - (\alpha_3+\alpha_5+\alpha_6)x^2 + (\alpha_1+\alpha_4+\alpha_2)x - 1 \quad \cdots\cdots(2.45) \end{aligned}$$

更に,

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6) \quad \cdots\cdots(2.46)$$

の x^5 の係数を比較して,

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6 = -1 \iff \alpha_3+\alpha_5+\alpha_6 = -1-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4) \quad \cdots\cdots(2.47)$$

ここで, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4 = \lambda$ と置けば, (2.44), (2.45), (2.46) により,

$$\begin{aligned} &x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\ &\quad = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)\times(x-\alpha_3)(x-\alpha_3)(x-\alpha_6) \quad \big(\because\ (2.46)\big) \\ &\quad = \big(x^3-\lambda x^2+(-1-\lambda)x-1\big)\big(x^3-(-1-\lambda)x^2+\lambda x-1\big) \quad \big(\because\ (2.44),\ (2.45)\big) \\ &\quad = x^6+x^5-(\lambda^2+\lambda+1)x^4-(2\lambda^2+2\lambda+3)x^3-(\lambda^2+\lambda+1)x^2+x+1 \quad \cdots\cdots(2.48) \end{aligned}$$

(2.48) の左右両辺の係数を比較して,

$$\lambda^2+\lambda+2=0 \iff \lambda = \frac{-1\pm\sqrt{7}\mathbf{i}}{2} \iff -1-\lambda = \frac{-1\mp\sqrt{7}\mathbf{i}}{2} = \overline{\lambda} \quad \cdots\cdots(2.49)$$

(2.47), (2.49) より,

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4 = \lambda = \frac{-1\pm\sqrt{7}\mathbf{i}}{2} \ \wedge\ \alpha_3+\alpha_5+\alpha_6 = -1-\lambda = \overline{\lambda} = \frac{-1\mp\sqrt{7}\mathbf{i}}{2} \ (\textbf{複号同順}) \quad \cdots\cdots(2.50)$$

(2.50) により, (2.44), (2.45) をまとめて表せば,

$$u(x) = x^3 - \frac{-1\pm\sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x^2 + \frac{-1\mp\sqrt{7}\mathbf{i}}{2}x - 1 \quad (\textbf{複号同順}) \quad \cdots\cdots(2.51)$$

の二通りも求める $u(x)$ である.

【Note】 – 1 の累乗根 –

「**複素平面**」は現行課程外であるが，高次方程式を扱う上で複素数のある程度の知識は必要なので，1 の n 乗根について最低限の説明をしておく．

$n=2$ の場合;

$$x^2=1 \iff x=\pm 1 \iff x=\cos\frac{2k\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{2}\ \ (k=0,\ 1) \qquad \cdots\cdots(2.52)$$

$n=3$ の場合;

$$\begin{aligned} x^3=1 &\iff (x-1)(x^2+x+1)=0 \\ &\iff x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\mathbf{i}}{2} \iff x=\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{3}\ \ (k=0,\ 1,\ 2) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2.53)$$

$n=4$ の場合;

$$\begin{aligned} x^4=1 &\iff (x-1)(x+1)(x^2+1)=0 \\ &\iff x=\pm 1,\ \pm\mathbf{i} \iff x=\cos\frac{2k\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{4}\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2.54)$$

$n=6$ の場合;

$$\begin{aligned} x^6=1 &\iff (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0 \\ &\iff x=\pm 1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\mathbf{i}}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}\mathbf{i}}{2} \\ &\iff x=\cos\frac{2k\pi}{6}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{6}\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2.55)$$

$n=8$ の場合;

$$\begin{aligned} x^8=1 &\iff (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0 \\ &\iff x=\pm 1,\ \pm\mathbf{i},\ \frac{\pm 1\pm\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\ \ (\textbf{複号任意}) \\ &\iff x=\cos\frac{2k\pi}{8}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{8}\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ 7) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2.56)$$

一般に，

$$x^n=1 \iff x=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \qquad \cdots\cdots(2.57)$$

(2.57) の n 個の異なる複素数が 1 の n 乗根であることは，以下の公式で容易に確認できる．

$$\text{deMoivre}:\ (\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathbf{i}\sin n\theta \qquad \cdots\cdots(2.58)$$

このとき，一般の二項方程式 $ax^n=b\ (ab\neq 0)$ の解は，

$$\begin{aligned} ax^n=b &\iff \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,x\right)^n=1 \iff \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,x=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ &\iff x=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2.59)$$

ここで，a, b は実数である．

【23.3】

3 次方程式

$$x^3+2x^2+3x+4=0$$

の解 α に対して，$|\alpha|>1$ が成り立つことを示せ.

ただし，$\alpha=a+\mathbf{i}b$ $(a,\ b:$ 実数$)$ のとき，$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$ である.

【解答】

$u(x)=x^3+2x^2+3x+4$ に対して，

$$u'(x)=3x^2+4x+3=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}>0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

即ち，$u(x)$ は単調増加であり，更に，

$$u(-2)=-2<0\ \land\ u(-1)=2>0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

により，$u(x)=0$ は $-2<x<-1$ に唯一実数解 x_0 を持ち，他は共役複素数解 $\alpha,\ \overline{\alpha}$ である.

即ち，

$$x^3+2x^2+3x+4=(x-x_0)(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\quad(-2<x_0<-1)\iff\begin{cases}x_0+\alpha+\overline{\alpha}=-2 & \cdots\cdots(3.3)\\ x_0(\alpha+\overline{\alpha})+\alpha\overline{\alpha}=3 & \cdots\cdots(3.4)\\ x_0\alpha\overline{\alpha}=-4 & \cdots\cdots(3.5)\\ -2<x_0<-1 & \cdots\cdots(3.6)\end{cases}$$

(3.5), (3.6) により，

$$|\alpha|^2=-\frac{4}{x_0}\ \land\ -2<x_0<-1\iff 2<|\alpha|^2<4\iff\sqrt{2}<|\alpha|<2 \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.6), (3.7) により，

$$1<|x_0|<2\ \land\ 1<\sqrt{2}<|\alpha|<2 \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

即ち，題意は示された.

【別解】 – 三角不等式 –

$u(x)=0$ の解を α と表せば,

$$u(\alpha)=\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+4=0 \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

両辺に $\alpha\neq 0$ を乗じて,

$$\alpha\, u(\alpha)=\alpha^4+2\alpha^3+3\alpha^2+4\alpha=0 \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

(3.9), (3.10) 両辺の差をとり,

$$(1-\alpha)\,u(\alpha)=4-\alpha-\alpha^2-\alpha^3-\alpha^4=0 \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

(3.11) の両辺の絶対値をとり,

$$\begin{aligned}
0=\big|(1-\alpha)\,u(\alpha)\big|&=\big|4-\alpha-\alpha^2-\alpha^3-\alpha^4\big|\\
&\geq 4-\big|\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4\big|=4-|\alpha|\,\big|1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\big|\\
&\geq 4-|\alpha|\big(\big|1+\alpha+\alpha^2\big|+|\alpha^3|\big)=4-|\alpha|\big(\big|1+\alpha+\alpha^2\big|+|\alpha|^3\big)\\
&\geq 4-|\alpha|\big(\big|1+\alpha\big|+|\alpha^2|+|\alpha|^3\big)=4-|\alpha|\big(\big|1+\alpha\big|+|\alpha|^2+|\alpha|^3\big)\\
&> 4-|\alpha|\big(1+|\alpha|+|\alpha|^2+|\alpha|^3\big) \quad \big(\because\ \alpha<0\ \vee\ \alpha\notin\mathbb{R}\big)\\
&=4-|\alpha|-|\alpha|^2-|\alpha|^3-|\alpha|^4=\big(1-|\alpha|\big)\,u(|\alpha|) \qquad \cdots\cdots(3.12)
\end{aligned}$$

即ち,

$$\big(1-|\alpha|\big)\,u(|\alpha|)<0 \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

ここで, $|\alpha|>0$ であるから,

$$u(|\alpha|)=|\alpha|^3+2|\alpha|^2+3|\alpha|+4>0 \qquad \cdots\cdots(3.14)$$

(3.13), (3.14) により,

$$1-|\alpha|<0 \iff |\alpha|>1 \qquad \cdots\cdots(3.15)$$

即ち, 題意は示された.

【Note】 – 掛合の定理 –

実数係数の n 次方程式

$$\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0 & \cdots\cdots(3.16) \\ 0 < a_n < a_{n-1} < \cdots\cdots < a_1 < a_0 & \cdots\cdots(3.17) \end{cases}$$

の解 α に対して，$|\alpha| > 1$ が成立する．

【証明】

(3.16) の負の実数解または虚数解を α と表せば，

$$u(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0 \qquad \cdots\cdots(3.18)$$

$\alpha \neq 0$ であるから，

$$\alpha\, u(\alpha) = a_n\alpha^{n+1} + a_{n-1}\alpha^n + \cdots + a_1\alpha^2 + a_0\alpha = 0 \qquad \cdots\cdots(3.19)$$

(3.18), (3.19) の両辺の差をとり，

$$(1-\alpha)\,u(\alpha) = a_0 - (a_0 - a_1)\alpha - \cdots - (a_{n-1} - a_n)\alpha^n - a_n\alpha^{n+1} = 0 \qquad \cdots\cdots(3.20)$$

(3.20) の両辺の絶対値をとり，

$$\begin{aligned}
0 &= \left|a_0 - (a_0-a_1)\alpha - \cdots\cdots - (a_{n-1}-a_n)\alpha^n - a_n\alpha^{n+1}\right| \\
&\geq |a_0| - \left|(a_0-a_1)\alpha + \cdots\cdots + (a_{n-1}-a_n)\alpha^n + a_n\alpha^{n+1}\right| \\
&= a_0 - |\alpha|\left|(a_0-a_1) + \cdots\cdots + (a_{n-1}-a_n)\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n\right| \\
&\geq a_0 - |\alpha|\left\{\left|(a_0-a_1) + \cdots\cdots + (a_{n-1}-a_n)\alpha^{n-1}\right| + |a_n\alpha^n|\right\} \\
&= a_0 - |\alpha|\left\{\left|(a_0-a_1) + \cdots\cdots + (a_{n-1}-a_n)\alpha^{n-1}\right| + a_n|\alpha|^n\right\} \\
&\geq a_0 - |\alpha|\left\{\left|(a_0-a_1) + \cdots\cdots + (a_{n-2}-a_{n-1})\alpha^{n-2}\right| + \left|(a_{n-1}-a_n)\alpha^{n-1}\right| + a_n|\alpha|^2\right\} \\
&= a_0 - |\alpha|\left\{\left|(a_0-a_1) + \cdots\cdots + (a_{n-2}-a_{n-1})\alpha^{n-2}\right| + (a_{n-1}-a_n)|\alpha|^{n-1} + a_n|\alpha|^n\right\} \\
&\ \vdots \\
&\geq a_0 - |\alpha|\left\{|(a_0-a_1) + (a_1-a_2)\alpha| + (a_2-a_3)|\alpha|^2 + \cdots\cdots + (a_{n-1}-a_n)|\alpha|^{n-1} + a_n|\alpha|^n\right\} \\
&> a_0 - |\alpha|\left\{|a_0-a_1| + |(a_1-a_2)\alpha| + (a_2-a_3)|\alpha|^2 + \cdots + (a_{n-1}-a_n)|\alpha|^{n-1} + a_n|\alpha|^n\right\} \quad (\because \alpha < 0 \vee \alpha \notin \mathbb{R}) \\
&= a_0 - (a_0-a_1)|\alpha| - (a_1-a_2)|\alpha|^2 - (a_2-a_3)|\alpha|^3 - \cdots\cdots - (a_{n-1}-a_n)|\alpha|^n - a_n|\alpha|^{n+1} \\
&= (1-|\alpha|)\,u(|\alpha|)
\end{aligned}$$

従って，

$$(1-|\alpha|)\,u(|\alpha|) < 0 \qquad \cdots\cdots(3.21)$$

ここで，$|\alpha| > 0$ $(\because\ \alpha \neq 0)$ であるから，

$$u(|\alpha|) = a_n|\alpha|^n + a_{n-1}|\alpha|^{n-1} + \cdots + a_1|\alpha| + a_0 > 0 \qquad \cdots\cdots(3.22)$$

(3.21), (3.22) により，

$$1 - |\alpha| < 0 \iff |\alpha| > 1 \qquad \cdots\cdots(3.23)$$

【23.4】

実数を係数とする x の整式 $u(x)$ に対して,

$$(x-1)\,u(x+1)-(x+2)\,u(x)=0 \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

がすべての実数 x で成り立つとき，$u(x)$ をすべて求めよ．

【解答】

任意の x に対して (4.1) が成り立つので,
(4.1) に $x=1,\ -1,\ 0$ を代入して,

$$u(1)=0\ \wedge\ u(-1)=0\ \wedge\ u(0)=0 \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

即ち，$u(x)$ は (4.2) を満たすことが**必要**である．
このとき，因数定理により,

$$u(x)=(x-1)x(x+1)\,v(x) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

を満たす整式 $v(x)$ が存在する．
(4.3) を (4.1) に代入して,

$$(x-1)x(x+1)(x+2)\big(v(x+1)-v(x)\big)=0 \quad (\forall x:\text{実数}) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

即ち,

$$v(x+1)-v(x)=0 \quad (\forall x:\text{実数}) \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

が成り立つことが**必要**である．
(4.5) の成立は，整式 $v(x)$ が恒等的にある定数 α に一致することを意味するので,

$$u(x)=\alpha(x-1)x(x+1) \quad \big(\because\ v(x)=\alpha\ (\forall x)\big) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

と表せ，(4.6) は常に (4.1) を満たすので**十分な解**である．