【24.1】

a を正の整数とする．

$2x-3y$ が 11 で割り切れるような整数 x, y の組 (x, y) の集合を Z,

$5x+ay$ が 11 で割り切れるような整数 x, y の組 (x, y) の集合を W

とおくとき，$Z=W$ となるような最小正整数 a の値を求めよ．

【解答】

不定方程式 $2x-3y=11n$ $(\forall n:\text{整数})$ の一般解は,

$$x=22n+3k, \quad y=11n+2k \quad (\forall n:\text{整数} \ \wedge \ \forall k:\text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

即ち，集合 Z の要素 (x, y) はすべて (1.1) の形で表せる．

この集合 Z の任意の要素 (x, y) に対して,

$$5x+ay=5(22n+3k)+a(11n+2k)=11(10+a)n+(15+2a)k \equiv (15+2a)k \pmod{11} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(1.2) により，$5x+ay$ が 11 の倍数となる最小の正整数 a は，$a=9$ である．

このとき,

$$Z \subseteq W \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

逆に $a=9$ となるとき,

不定方程式 $5x+9y=11m$ $(\forall m:\text{整数})$ の一般解は,

$$x=22m+9j, \quad y=-11m-5j \quad (\forall m:\text{整数} \ \wedge \ \forall j:\text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

即ち，集合 W の要素 (x, y) はすべて (1.4) の形で表せる．

この集合 W の任意の要素 (x, y) に対して,

$$2x-3y=2(22m+9j)-3(-11m-5j)=11(7m+3l) \equiv 0 \pmod{11} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

このとき,

$$W \subseteq Z \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.3), (1.6) により，$W=Z$ となる最小の正整数 a は，$a=9$ である．

【Note】 – 不定方程式の一般解 –

$2x-3y=11n$ の一般解は,

$2x-3y=1$ の特殊解 $(x, y)=(2,\ 1)$ を $11n$ 倍した $(x, y)=(22n,\ 11n)$ を特殊解として,

$2(x-22n)=3(y-11n)$ と同値変形することで得られる．

即ち，$\gcd(2, 3)=1$ に注意すれば，任意整数 k を用いて,

$$x-22n=3k \ \wedge \ y-11n=2k \quad (\forall n:\text{整数}, \forall k:\text{整数}) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

方程式 $5x+9y=11m$ についても同様の論法で (1.4) を得る．

【24.2】

(1) 恒等式

$$\left(u^2-Nv^2\right)\left(x^2-Ny^2\right)=(ux+Nvy)^2-N(vx+uy)^2 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を利用して，方程式

$$x^2-3y^2=1 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

の正整数解

$$(x_n,\ y_n) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を無限に生成する数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の満たす連立漸化式を求めよ.

(2) 連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n-3b_n \\ b_{n+1}=-a_n+2b_n \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

に対して，初期条件

$${a_1}^2-3{b_1}^2=1 \quad (a_1,\ b_1 : \text{正整数}) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

を満たす正整数 a_1, b_1 を与えるとき，すべての番号 n に対して，

$${a_n}^2-3{b_n}^2=1 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が単調減少な正整数列であることを示し，

$$a_m=2 \ \land \ b_m=1 \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

を満たす番号 m が存在することを示せ.

(4) 以上の議論を踏まえ，方程式 $x^2-3y^2=1$ の一般解 $(x_n,\ y_n)$ を n の式で表せ.

【解説】

(1) (2.1) に対して，$N=3$, $u=2$, $v=1$ を代入して，

$$\left(2^2-3\times1^2\right)\left(x^2-3y^2\right)=(2x+3y)^2-3(x+2y)^2 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

上式右辺に注目して，

$$x_{n+1}=2x_n+3y_n \ \land \ y_{n+1}=x_n+2y_n \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

によって $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を定義すれば，

$x_1=2$, $y_1=1$ から始めて，${x_n}^2-3{y_n}^2=1$ を満たす正整数 x_n, y_n を与えたとき，

$$x_n<x_{n+1} \ \land \ y_n<y_{n+1} \ \land \ {x_{n+1}}^2-3{y_{n+1}}^2=1 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

を満たす正整数 x_{n+1}, y_{n+1} が導かれ，

この操作は無限に続けられるので，(2.8) を題意の連立漸化式と考えてよい.

(2) (2.3) により，

$$a_{n+1}{}^2-3b_{n+1}{}^2=(2a_n-3b_n)^2-3(-a_n+2b_n)^2=a_n{}^2-3b_n{}^2$$
$$\iff a_{n+1}{}^2-3b_{n+1}{}^2=a_n{}^2-3b_n{}^2=\cdots=a_1{}^2-3b_1{}^2=1 \quad \cdots\cdots(2.10)$$

即ち，(2.4) を満たす正整数 a_1, b_1 を与えたとき，
(2.10) により，すべての番号 n に対して，(2.5) が成立する．
(3) ある番号 n に対して，a_n, b_n が正整数であることを仮定して，

$$b_{n+1}=2b_n-a_n=2b_n-\sqrt{3b_n{}^2+1}\geq 2b_n-\sqrt{4b_n{}^2}=0 \quad \left(\because\ b_n\geq 1,\ (2.3),\ (2.5)\right)$$
$$\iff b_{n+1}\geq 0 \quad \cdots\cdots(2.11)$$

ここで，等号成立は $b_n=1$ のときに限られる．

$$\therefore\ b_n=1 \iff b_{n+1}=0 \quad \cdots\cdots(2.12)$$

更に，(2.3), (2.5) により，

$$b_{n+1}-b_n=b_n-a_n=b_n-\sqrt{3b_n{}^2+1}<b_n-\sqrt{3b_n{}^2}=\left(1-\sqrt{3}\right)b_n<0 \quad \cdots\cdots(2.13)$$

即ち，$b_n\geq 1$ ならば $b_n>b_{n+1}$ が導かれ，$\{b_n\}$ は**単調減少な正整数列**であるから，

$$b_1>b_2>\cdots>b_m=1\ (>0=b_{m+1}) \quad \cdots\cdots(2.14)$$

となる番号 m が存在する．
同様に，(2.3), (2.5) により，

$$a_{n+1}=2a_n-3b_n=2\sqrt{3b_n{}^2+1}-3b_n>2\sqrt{3b_n{}^2}-3b_n=\left(2\sqrt{3}-3\right)b_n>0 \quad \left(\because\ b_n\geq 1\right) \quad \cdots\cdots(2.15)$$

即ち，$b_n\geq 1$ ならば $a_{n+1}>0$ が導かれ，

$$a_{n+1}-a_n=a_n-3b_n=\sqrt{3b_n{}^2+1}-3b_n<\sqrt{4b_n{}^2}-3b_n=-b_n<0 \quad \left(\because\ b_n\geq 1\right) \quad \cdots\cdots(2.16)$$

即ち，$a_n>a_{n+1}$ も導かれるので，$\{a_n\}$ は**単調減少な正整数列**である．
このとき，(2.5) により，

$$b_m=1\ \wedge\ a_m=2 \quad \cdots\cdots(2.17)$$

を満たす番号 m が存在する．
(4) (2) の連立漸化式 (2.3) は，(1) の連立漸化式 (2.8) の逆変換であるので，
(3) の議論により，(2.8) で導かれる $(x_n,\ y_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ を方程式 (2.2) の**必要十分な解**と考えてよく，
$x_1=2$, $y_1=1$ の初期条件の下，連立漸化式 (2.8) を解いて次の一般解を得る．

$$x_n=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2},\quad y_n=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots(2.18)$$

[Note] (2.18) は**共役数**を用いてより単純に求められる．詳細は前期演習の [4.2] を参照．

【24.3】

整数 n と素数 p に対して，x の 3 次方程式

$$x^3+nx^2-(5-n)x+p=0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

が整数解を持つとき，この方程式の解をすべて求めよ．

【解答】

(3.1) より，

$$x(x^2+nx+n-5)=-p \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

整数 x に対して，(3.2) 左辺第二因数は整数であり，右辺の p は素数であるから，

$$x=\pm 1,\ \pm p \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

の 4 通りの x の値が考えられる．

● $x=1$ の場合;

(3.2) 左辺第二因数に注目して，

$$2n-4=-p \iff p=2(2-n) \iff n=1 \ \wedge \ p=2 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(3.4) を (3.1) に代入して，

$$x^3+x^2-4x+2=0 \iff (x-1)(x^2+2x-2)=0 \iff x=1,\ -1\pm\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

● $x=-1$ の場合; (3,2) により，$p=-4$ が導かれ題意に反する．

● $x=p$ の場合;

(3.2) 左辺第二因数に注目して，

$$p^2+(p+1)n-5=-1 \iff n=\frac{4-p^2}{p+1} \iff n=-(p-1)+\frac{3}{p+1} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

ここで，n が整数はあるから $p+1$ は 3 の約数であり，

$$p=2 \ \wedge \ n=0 \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.7) を (3.1) に代入して，

$$x^3-5x+2=0 \iff (x-2)(x^2+2x-1)=0 \iff x=2,\ -1\pm\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

● $x=-p$ の場合;

(3.2) 左辺第二因数に注目して，

$$p^2+(1-p)n-5=1 \iff n=\frac{p^2-6}{p-1} \iff n=p+1-\frac{5}{p-1} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

ここで，n は整数であるから $p-1$ は 5 の約数であり，

$$p=2 \ \wedge \ n=-2 \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

(3.10) を (3.1) に代入して，

$$x^3-2x^2-7x+2=0 \iff (x+2)(x^2-4x+1)=0 \iff x=-2,\ 2\pm\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

以上より，求める解は (3.5), (3.8), (3.11) である．

【24.4】

$n,\ a,\ b,\ c,\ d$ はすべて 0 以上の整数であり，

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2=n^2-6 & \cdots\cdots(4.1) \\ a+b+c+d \leq n & \cdots\cdots(4.2) \\ a \geq b \geq c \geq d \geq 0 & \cdots\cdots(4.3) \end{cases}$$

を満たすものとする．

このような整数の組 $(n,\ a,\ b,\ c,\ d)$ をすべて求めよ．

【解答】

(4.1), (4.2) から n を消去して，

$$(a+b+c+d)^2 \leq a^2+b^2+c^2+d^2+6 \iff ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq 3 \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

(4.3) を考慮して (4.4) を書き換えると，

$$6d^2 \leq ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq 3 \qquad \therefore\ d=0 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

このとき，(4.4) は，

$$ab+bc+ca \leq 3 \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

$a \geq b \geq c \geq 0$ を考慮して (4.6) を書き換えると，

$$3c^2 \leq ab+bc+ca \leq 3 \qquad \therefore\ c^2 \leq 1 \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

即ち，$c=0 \vee c=1$ の場合を調べればよい．

● $c=0$ の場合；

$$\begin{cases} a^2+b^2=n^2-6 & \cdots\cdots(4.8) \\ a+b \leq n & \cdots\cdots(4.9) \\ a \geq b \geq 0 & \cdots\cdots(4.10) \\ ab \leq 3 & \cdots\cdots(4.11) \end{cases} \qquad (\because\ c=d=0)$$

(4.10), (4.11) により，$b=0 \vee b=1$ である．

⋆ $b=0$ の場合；(4.8) により，

$$(n+a)(n-a)=6 \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

ここで，$n+a,\ n-a$ は偶奇が一致するので積は奇数か 4 の倍数であり，(4.12) は成立しない．

⋆ $b=1$ の場合；(4.11) により，

$$a=1 \ \vee\ a=2 \ \vee\ a=3 \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

この 3 通りの値を (4.8) に代入して，n が整数となるのは，

$$a=3 \ \wedge\ n=4 \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

に限られる．

$$\therefore\ (a,\ b,\ c,\ d,\ n)=(3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4) \qquad \cdots\cdots(4.15)$$

• $c=1$ の場合;

$$\begin{cases} a^2+b^2=n^2-7 & \cdots\cdots(4.16) \\ a+b \leq n-1 & \cdots\cdots(4.17) \\ a \geq b \geq 1 & \cdots\cdots(4.18) \\ ab+a+b \leq 3 & \cdots\cdots(4.19) \end{cases} \quad \left(\because\ d=0 \land c=1\right)$$

(4.19) により,

$$(a+1)(b+1) \leq 4 \qquad \cdots\cdots(4.20)$$

ここで, (4.18) を考慮すれば,

$$a=1 \ \land \ b=1 \qquad \cdots\cdots(4.21)$$

(4.21) は $n=3$ として, (4.16), (4.17) を満たす.

$$\therefore\ (a,\ b,\ c,\ d,\ n)=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 3) \qquad \cdots\cdots(4.22)$$

以上, (4.15), (4.22) により,

$$(n,\ a,\ b,\ c,\ d)=(4,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0), \quad (3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0) \qquad \cdots\cdots(4.23)$$