【25.1】

(1) $110101_{(2)} \times 1011_{(2)}$ の結果を 8 進表記して答えよ．

(2) 正整数 x が 2 進表記されているとき，それを右から 3 桁ずつ区切り，10 進表記で各区切りの表す数 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ を考える．これらの和 $y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ が 7 で割り切れるとき，x は 7 で割り切れることを示せ．

【解答】

(1) 2 進数のまま掛け算をして，

$$110101_{(2)} \times 1011_{(2)} = 1001000111_{(2)}$$

右辺を末位から 3 桁ずつ区切って，

$$1_{(2)} \big| 001_{(2)} \big| 000_{(2)} \big| 111_{(2)} = 1107_{(8)}$$

(2) x の 2 進表記を $a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0$ で表す．即ち，

$$x = a_m \times 2^m + a_{m-1} \times 2^{m-1} + \cdots + a_1 \times 2 + a_0 \quad \big(a_k = 0 \vee a_k = 1 \ \ (0 \leq k \leq m)\big) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

(1.1) の右辺を末項から 3 項ずつまとめて，

$$\begin{aligned} x = \big(a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0\big) + \big(a_5 \times 2^2 + a_4 \times 2 + a_3\big) \times 2^3 + \cdots \\ \cdots + \big(a_{3k+2} \times 2^2 + a_{3k+1} \times 2 + a_{3k}\big) \times 2^{3k} + \cdots \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

題意より，

$$a_{3k+2} \times 2^2 + a_{3k+1} \times 2 + a_{3k} = y_k \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

と表せ，更に，

$$000_{(2)} = 0,\ 001_{(2)} = 1,\ 010_{(2)} = 2,\ \cdots\cdots,\ 111_{(2)} = 7 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

であるから，各 y_k は 0, 1, 2, $\cdots$, 7 の 8 種類の 10 進数を表す．
従って，(1.2) の右辺は，

$$x = y_0 + y_1 \times 8 + y_2 \times 8^2 + \cdots + y_n \times 8^n \quad \big(y_k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 7 \ \ (k = 0, 1, \cdots, n)\big) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

と書き換えられるので，(1.5) の右辺を module 7 で計算して，

$$x = y_0 + y_1 \times (7+1) + y_2 \times (7+1)^2 + \cdots + y_n \times (7+1)^n \equiv y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_n \pmod 7 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

即ち，$y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ が 7 で割り切れれば，x 自身も 7 で割り切れる．

[Note]

- 10 進数 $a_n a_{n-1} \cdots a_0$ が 9 で割り切れるか否かを判定するのに,

$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$ を 9 で割って調べる方法がある．即ち,

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} \cdots a_0 &= a_n \times 10^n + + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \\ &= a_n \times (9+1)^n + a_{n-1} \times (9+1)^{n-1} + \cdots + a_1 \times (9+1) + a_0 \\ &\equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0 \pmod 9 \end{aligned}$$

従って，$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$ が 9 で割り切れれば，$a_n a_{n-1} \cdots a_0$ も 9 で割り切れる．
また，二項定理

$$10^n = (11-1)^n = {}_n\mathrm{C}_n \cdot 11^n + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot 11^{n-1}(-1) + \cdots + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 11(-1)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_0(-1)^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$$

の成立に注意すれば,

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} \cdots a_0 &= a_n \times 10^n + + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \\ &= a_n \times (11-1)^n + a_{n-1} \times (11-1)^{n-1} + \cdots + a_1 \times (11-1) + a_0 \\ &\equiv (-1)^n \{a_n - a_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n a_0\} \pmod{11} \end{aligned}$$

により．$a_n - a_{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0$ が 11 で割り切れれば，$a_n a_{n-1} \cdots a_0$ も 11 で割り切れることになる．

- 2 進数を右から 3 桁ずつ区切って 10 進変換すると 8 進数に書き換えられる．

同様に，2 進数を右から 4 桁ずつ区切って下表のように対応させると 16 進数に変換できる．

2 進数	0000	0001	$\cdots$	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
16 進数	0	1	$\cdots$	9	A	B	C	D	E	F

【25.2】

$\alpha_1,\ \alpha_2$ は正の無理数で

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=1 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を満たすものとする．

(1) 任意の正整数 n に対して，

$$\left[\frac{n}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{n}{\alpha_2}\right]=n-1 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 2 つの系列の整数

$$\begin{cases} [\alpha_1],\ [2\alpha_1],\ [3\alpha_1],\ \cdots \\ [\alpha_2],\ [2\alpha_2],\ [3\alpha_2],\ \cdots \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

には，すべての正整数が漏れなく，重複なく現れることを示せ．

【解答】

(1) $k_1,\ k_2$ を正整数として，

$$\left[\frac{n}{\alpha_1}\right]=k_1,\quad \left[\frac{n}{\alpha_2}\right]=k_2 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

と表せば，$\dfrac{n}{\alpha_1},\ \dfrac{n}{\alpha_2}$ が無理数であることに注意して，

$$k_1<\frac{n}{\alpha_1}<k_1+1\ \land\ k_2<\frac{n}{\alpha_2}<k_2+1 \iff \frac{n}{\alpha_1}-1<k_1<\frac{n}{\alpha_1}\ \land\ \frac{n}{\alpha_2}-1<k_2<\frac{n}{\alpha_2} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) の辺々を加えて，

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)n-2<k_1+k_2<\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)n \iff n-2<k_1+k_2<n \quad \big(\because\ (2.1)\big)$$

$$\iff \left[\frac{n}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{n}{\alpha_2}\right]=n-1 \quad \big(\because\ (2.4)\big) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2) (2.1) より，$\alpha_1>1,\ \alpha_2>1$ であるから，

$$\begin{cases} [\alpha_1]<[2\alpha_1]<[3\alpha_1]<\cdots \\ [\alpha_2]<[2\alpha_2]<[3\alpha_2]<\cdots \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

において，整数列 $\big\{[m_1\alpha_1]\big\}$ に重複する整数はなく，整数列 $\big\{[m_2\alpha_2]\big\}$ に重複する整数はない．

更に，任意の番号 $m_1,\ m_2$ に対して，

$$[m_1\alpha_1]\neq[m_2\alpha_2] \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

何故なら，

$$[m_1\alpha_1]=[m_2\alpha_2]=k \quad (k:\text{正整数}) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

なる正整数 k の存在を仮定すると，

$$k<m_1\alpha_1<k+1\ \land\ k<m_2\alpha_2<k+1 \iff \frac{m_1}{k+1}<\frac{1}{\alpha_1}<\frac{m_1}{k}\ \land\ \frac{m_2}{k+1}<\frac{1}{\alpha_2}<\frac{m_2}{k} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.8) の辺々を加えて，

$$\frac{m_1+m_2}{k+1}<\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}<\frac{m_1+m_2}{k} \iff k<m_1+m_2<k+1 \quad \big(\because\ (2.1)\big) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.9) は $k,\ k+1$ が連続整数であることに矛盾ので，(2.6) の成立が示される．

一方，区間 $(0,\ n)$ には $[m_1\alpha_1]$, $[m_2\alpha_2]$ の形の整数がそれぞれ

$$\left[\frac{n}{\alpha_1}\right],\quad \left[\frac{n}{\alpha_2}\right] \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

個ずつ存在し，(1) の結果より合計

$$\left[\frac{n}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{n}{\alpha_2}\right]=n-1 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

個存在するので，Dirichlet **の原理**により，

区間 $[1,\ n-1]$ に漏れなく，重複なく $[m_1\alpha_1]$, $[m_2\alpha_2]$ の形の正整数が存在することになる．

ここで，n は任意の正整数にとれるので題意は示された．

【25.3】

正整数 n の関数 $a(n)$, $b(n)$ を次のように定義する.

$$a(n) = (n \text{ を 7 で割った余り}), \quad b(n) = 2a\left(\textstyle\sum_{k=1}^{7} k^n\right)$$

(1) すべての正整数 n に対して，$a(n^7) = a(n)$ であることを示せ.

(2) 正整数 n を任意に 1 つ決めて $b(n)$ の値を計算せよ．この $b(n)$ の値を設問 (2) における得点とする.

【解答】

(1) $n \equiv k \pmod 7$ $(k = 0, 1, 2 \cdots, 6)$ として，

$$a(k^7) = a(k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, 6) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を示せば十分である．$\left(\because\ a(n) = a(7m+k) = a(k)\ (m : \text{整数})\right)$

そこで，k^r $(k = 0, 1, \cdots, 6;\ r = 1, 2, \cdots, 7)$ を 7 で割った余りを求める．(**下表**)

r									$\sum_{k=0}^{6} k^r$	$a\left(\sum_{k=0}^{6} k^r\right)$
1	k	0	1	2	3	4	5	6	21	0
2	k^2	0	1	4	2	2	4	1	14	0
3	k^3	0	1	1	6	1	6	6	21	0
4	k^4	0	1	2	4	4	2	1	14	0
5	k^5	0	1	4	5	2	3	6	21	0
6	k^6	0	1	1	1	1	1	1	6	6
7	k^7	0	1	2	3	4	5	6	21	0

表において，第 1 行目と第 7 行目が一致するので，$k = 0, 1, 2, \cdots, 6$ に対して，(3.1) が成り立つ.

(2) 表の最右列は，$r = 1, 2, \cdots, 7$ に対する

$$a\left(\textstyle\sum_{k=0}^{6} k^r\right) = a\left(\textstyle\sum_{k=1}^{6} k^r\right) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

の値を表すので，$r = 6$ として，

$$b(6) = 2 \times a\left(\textstyle\sum_{k=1}^{6} k^6\right) = 2 \times 6 = 12 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

を得る．これがこの設問の**最大得点**である.

【Note】

説明するまでもないが，テーマは以下の Fermat **の小定理**である.

$$a^p \equiv a \pmod p \quad (a : \text{任意整数},\ p : \text{素数})$$

【25.4】

複素数 z に対して，集合 A, B, C, D, S を次のように定義する．ただし，$\bar{z}$ は z の共役複素数を表す．

$$\mathrm{A}=\left\{z\,\middle|\,\frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}:\text{整数}\right\},\ \mathrm{B}=\left\{z\,\middle|\,\frac{z+\bar{z}}{\sqrt{3}}:\text{整数}\right\},\ \mathrm{C}=\left\{z\,\middle|\,\frac{z-\bar{z}}{\sqrt{2}\mathbf{i}}:\text{整数}\right\},\ \mathrm{D}=\left\{z\,\middle|\,\frac{z-\bar{z}}{\sqrt{3}\mathbf{i}}:\text{整数}\right\},$$

$$\mathrm{S}=(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{D})$$

集合 S から 17 個の複素数を任意に選び，その集合を T とする．
このとき，T の中の 2 数で，その平均値が S の要素になっているものが必ず存在することを示せ．

【解答】

$x,\ y$ を実数として，$z=x+\mathbf{i}y$ と表す．

$$\begin{cases}\dfrac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}x\ \text{が整数のとき, 任意の整数}\ m\ \text{に対して,}\ x=\dfrac{\sqrt{2}m}{2}\\[2mm] \dfrac{z+\bar{z}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\text{が整数のとき, 任意の整数}\ m\ \text{に対して,}\ x=\dfrac{\sqrt{3}m}{2}\\[2mm] \dfrac{z-\bar{z}}{\sqrt{2}\mathbf{i}}=\sqrt{2}y\ \text{が整数のとき, 任意の整数}\ n\ \text{に対して,}\ y=\dfrac{\sqrt{2}n}{2}\\[2mm] \dfrac{z-\bar{z}}{\sqrt{3}\mathbf{i}}=\dfrac{2y}{\sqrt{3}}\text{が整数のとき, 任意の整数}\ n\ \text{に対して,}\ y=\dfrac{\sqrt{3}n}{2}\end{cases}$$

そこで,

$$\mathrm{A}\cap\mathrm{C}=\mathrm{S}_1=\left\{z\,\middle|\,z=\frac{\sqrt{2}m+\sqrt{2}n\mathbf{i}}{2}\ \ (m,\ n:\text{整数})\right\},\quad \mathrm{A}\cap\mathrm{D}=\mathrm{S}_2=\left\{z\,\middle|\,z=\frac{\sqrt{2}m+\sqrt{3}n\mathbf{i}}{2}\ \ (m,\ n:\text{整数})\right\}$$

$$\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\mathrm{S}_3=\left\{z\,\middle|\,z=\frac{\sqrt{3}m+\sqrt{2}n\mathbf{i}}{2}\ \ (m,\ n:\text{整数})\right\},\quad \mathrm{B}\cap\mathrm{D}=\mathrm{S}_4=\left\{z\,\middle|\,z=\frac{\sqrt{3}m+\sqrt{3}n\mathbf{i}}{2}\ \ (m,\ n:\text{整数})\right\}$$

と置けば，$\mathrm{S}=\bigcup_{k=1}^{4}\mathrm{S}_k$ である．
この集合 S から任意に 17 個の複素数を選べば，その内の少なくとも 5 個は同一の集合 S_k に含まれる．
この 5 個 (またはそれ以上) の複素数について，その実部と虚部を表す整数の組 $(m,\ n)$ の偶奇で,

$$(\text{even, even}),\quad(\text{even, odd}),\quad(\text{odd, even}),\quad(\text{odd, odd})$$

の 4 通りに分類すると，5 個 (またはそれ以上) の複素数の少なくとも 2 個は上記分類の同一組に属する．
その少なくとも 2 個の複素数 $z_1,\ z_2$ の実部と虚部の整数部分を $(m_1,\ n_1),\ (m_2,\ n_2)$ で表せば,

$$z_3=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{\dfrac{m_1+m_2}{2}\sqrt{r}+\mathbf{i}\,\dfrac{n_1+n_2}{2}\sqrt{s}}{2}=\frac{m_3\sqrt{r}+\mathbf{i}n_3\sqrt{s}}{2}\quad\big((r=2,\ 3)\wedge(s=2,\ 3)\big)$$

より，$m_3,\ n_3$ は整数であるから，$z_1,\ z_2$ の平均値 z_3 は $z_1,\ z_2$ と同一の集合 S_k に属する．

$$\therefore\ \ z_3\in\mathrm{S}_k\subset\mathrm{S}\quad(k=1,2,3,4)$$