【26.1】

すべての桁の数字が 1 である 10^{17}以下の正整数の中に，17 の倍数が少なくとも 1 個存在することを示せ.

【解答】 – 循環小数 –

1/17 を循環小数表示して,

$$\frac{1}{17}=0.\dot{0}58823529411764\dot{7}=\frac{588235294117647}{9999999999999999}$$
$$\iff 9\times 1111111111111111=17\times 588235294117647 \quad \cdots\cdots(1.1)$$

ここで，$\gcd(9,\ 17)=1$ であるから,

$$1111111111111111\ (16\ 桁)$$

は 17 の倍数である.

【別解】 – Dirichlet の原理 –

題意の整数は,

$$1,\ 11,\ 111,\ \cdots,\ 11\cdots1\,(17\ 桁) \quad \cdots\cdots(1.2)$$

であり，この 17 個の整数の中に 17 の倍数が存在しないと仮定する.

このとき，(1.2) の「17 個の整数」を 17 で割った余りは,

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 16 \quad \cdots\cdots(1.3)$$

の「16 通り」のいずれかであるから，Drichlet **の原理**により,

(1.2) には 17 で割った余りが一致するものが少なくとも 2 個存在する.

その 2 個 (以上) の整数に対しては互いの差が 17 で割り切れるはずである.

一方，(1.2) の 2 数の差はすべて

$$11\cdots100\cdots0=11\cdots1\times10^{n} \quad (1\leq n\leq16) \quad \cdots\cdots(1.4)$$

の形で表され，先頭に連なる 1 の個数は最大 16 個である.

ここで，$\gcd(17,\ 10)=1$ に注意すれば，(1.4) の形の整数が 17 で割り切れることは，波線部の仮定に反する.

従って，背理法により最初の仮定は否定され，(1.2) には 17 の倍数が少なくとも 1 個存在することになる.

【別解】 – 既約剰余系 –

素数 17 の既約剰余系を

$$\mathsf{A}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 16\} \quad \cdots\cdots(1.5)$$

とするとき，$\gcd(17,\ 10)=1$ であるから,

$$\mathsf{B}=\{10,\ 20,\ \cdots,\ 160\} \quad \cdots\cdots(1.6)$$

も 17 の既約剰余系である．このとき,

$$1\times2\times\cdots\times16\equiv10\times20\times\cdots\times160 \pmod{17}$$
$$\iff 16!\times(10^{16}-1)\equiv0 \pmod{17} \iff 9\times11\cdots1(16\ 桁)\equiv0 \pmod{17}$$
$$\iff 11\cdots1(16\ 桁)\equiv0 \pmod{17} \quad \cdots\cdots(1.7)$$

従って，題意は示された.

【別解】　– 合同式 –

題意の 17 個の整数はすべて

$$\sum_{k=0}^{n} 10^k \quad (n = 0, 1, \cdots, 16) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

の形に表せるので，(1.8) の各項を modulus17 で計算して，

n	modulus17	$\sum_{k=0}^{n} 10^k$
$n=0$	$10^0 \equiv 1$	1
$n=1$	$10^1 \equiv 10 \equiv -7$	-6
$n=2$	$10^2 \equiv -70 \equiv -2$	-8
$n=3$	$10^3 \equiv -20 \equiv -3$	-11
$n=4$	$10^4 \equiv -30 \equiv 4$	-7
$n=5$	$10^5 \equiv 40 \equiv 6$	-1
$n=6$	$10^6 \equiv 60 \equiv 9$	8
$n=7$	$10^7 \equiv 90 \equiv 5$	13
$n=8$	$10^8 \equiv 50 \equiv -1$	12
$n=9$	$10^9 \equiv -10 \equiv 7$	19
$n=10$	$10^{10} \equiv 70 \equiv 2$	21
$n=11$	$10^{11} \equiv 20 \equiv 3$	24
$n=12$	$10^{12} \equiv 30 \equiv -4$	20
$n=13$	$10^{13} \equiv -40 \equiv -6$	14
$n=14$	$10^{14} \equiv -60 \equiv 8$	22
$n=15$	$10^{15} \equiv 80 \equiv -5$	17

表より，

$$\sum_{k=0}^{15} 10^k = 11\cdots1(16\text{ 桁}) \equiv 0 \pmod{17} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

従って，題意は示された．

【26.2】

正整数 $n \geq 2$ に対して,

$$\gcd(n,\ m) = 1\ \wedge\ 1 \leq m \leq n$$

なる正整数 m の個数を $\varphi(n)$ で表し，このような m を $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{\varphi(n)}$ と表すとき,

$$\sum_{k=1}^{\varphi(n)} a_k = \frac{n}{2}\varphi(n)$$

が成り立つことを示せ.

【解答】

n と互いに素な n 以下の正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(n)}$ に対して,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{\varphi(n)} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

としても一般性を失わない.

一般に，正整数 $n,\ a$ に対して,

$$\gcd(n,\ a) = 1 \iff \gcd(n,\ n-a) = 1 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

が成り立つので，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{\varphi(n)}$ に対して,

$$\begin{aligned} &a_{\varphi(n)} = n - a_1,\ a_{\varphi(n)-1} = n - a_2,\ a_{\varphi(n)-2} = a_3,\ \cdots \\ &\iff a_1 + a_{\varphi(n)} = n,\ a_2 + a_{\varphi(n)-1} = n,\ a_3 + a_{\varphi(n)-2} = n,\ \cdots \qquad \cdots\cdots(2.3) \end{aligned}$$

従って,

$$\sum_{k=1}^{\varphi(n)} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\varphi(n)-1} + a_{\varphi(n)} = \frac{n}{2}\varphi(n) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

【26.3】

正整数 $n,\ p$ に対して，n^p を 10 進表記したときの 1 の位の数を $u_p(n)$ で表す.

(1) すべての正整数 n に対して，$u_5(n)=u_1(n)$ であることを示せ.

(2) n が正整数全体を動くとき，$u_{100}(n)$ のとり得る値をすべて求めよ.

【解答】

(1) 題意より，

$$\begin{aligned} u_5(n)=u_1(n) &\iff n^5\equiv n \pmod{10} \\ &\iff (n-1)n(n+1)(n^2+1)\equiv 0 \pmod{10} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を示せばよい.

まず，$(n-1)n(n+1)$ は連続 3 整数の積であるから，

$$(n-1)n(n+1)\equiv 0 \pmod 2 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

次に，n を modulus 5 で分類したとき，$n-1,\ n+1,\ n^2+1$ の値を modulus 5 で計算すると，

n	$n-1$	$n+1$	n^2+1	$(n-1)n(n+1)(n^2+1)$
0	-1	1	1	0
1	0	2	2	0
2	1	-2	0	0
-2	2	-1	0	0
-1	-2	0	2	0

表より，$n\equiv 0, \pm1, \pm2 \pmod 5$ のとき，

$$(n-1)n(n+1)(n^2+1)\equiv 0 \pmod 5 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(3.2), (3.3) により，(3.1) は示された.

(2) (1) の結果により，

$$n^{100}\equiv n^{20}\equiv n^4 \pmod{10} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

そこで，$n,\ n^2,\ n^4$ を modulus10 で計算すると，

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

表より，

$$u_{100}(n)=0,\ 1,\ 5,\ 6 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

【26.4】

実数 a に対して，$k \leq a < k+1$ を満たす整数 k を $[a]$ で表す．
n を正の整数として，

$$u(x) = \frac{x^2(2\cdot 3^3 n - x)}{2^5\cdot 3^3 n^2} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

と置くとき，$36n+1$ 個の整数

$$[u(0)],\ [u(1)],\ \cdots\cdots,\ [u(36n)] \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

の内の異なる整数の個数を n を用いて表せ．

【解答】　– 平均値の定理 –

(4.1) を微分して，

$$u'(x) = \frac{2^2\cdot 3^3 nx - 3x^2}{2^5\cdot 3^3 n^2} = \frac{x(36n-x)}{2^5\cdot 3^2 n^2} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

$u'(x) \geq 0$ より，$0 \leq x \leq 36n$ において $u(x)$ は単調増加．即ち，

$$u(0) < u(1) < \cdots < u(36n) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

更に，$u'(x) \geq 1$ より，

$$x(36n-x) \geq 2^5\cdot 3^2 n^2 \iff (x-12n)(x-24n) \leq 0 \iff 12n \leq x \leq 24n \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

平均値の定理により，$12n \leq k < 24n$ なる整数 k に対して，

$$u(k+1) - u(k) = u'(\xi) > 1 \quad (k < \xi < k+1) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

$0 \leq k < 12n \vee 24n \leq k < 36n$ なる整数 k に対して，

$$u(k+1) - u(k) = u'(\xi) < 1 \quad (k < \xi < k+1) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

従って，(4.6) により，

$$[u(12n)],\ [u(12n+1)],\ \cdots,\ [u(24n)] \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

なる $12n+1$ 個の整数はすべて異なる．
また，(4.7) により，$[u(0)], \cdots, [u(12n)]$ の中には，

$$[u(0)] = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7n = [u(12n)] \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

なる $7n+1$ 個の整数が現れ，$[u(24n)], \cdots, [u(36n)]$ の中には，

$$[u(24n)] = 20n,\ 20n+1,\ \cdots,\ 27n = [u(36n)] \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

なる $7n+1$ 個の整数が現れる．
従って，(4.8), (4.9), (4.10) により，異なる整数の個数は $26n+1$ 個である．

【別解】　– 文系用 –

(4.4) までは前頁の解答と共通とする．

このとき，

$$u(x+1)-u(x)\geq 1 \iff \frac{(x+1)^2(2\cdot 3^3n-(x+1))}{2^5\cdot 3^3n^2}-\frac{x^2(2\cdot 3^3n-x)}{2^5\cdot 3^3n^2}\geq 1$$

$$\iff 3x^2-3\left(2^2\cdot 3^2n-1\right)x+\left(2^5\cdot 3^3n^2-2\cdot 3^3n+1\right)\leq 0$$

$$\iff \frac{3(36n-1)-\sqrt{36^2n^2-3}}{6}\leq x\leq \frac{3(36n-1)+\sqrt{36^2n^2-3}}{6} \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

ここで，n は正の整数であるから，

$$36^2n^2-72n+1<36^2n^2-3<36^2n^2 \iff 36n-1<\sqrt{36^2n^2-3}<36n \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

が成り立ち，(4.12) により，(4.11) の左右両辺は，

$$\begin{cases} 12n-1<\dfrac{3(36n-1)-36n}{6}<\dfrac{3(36n-1)-\sqrt{36^2n^2-3}}{6}<\dfrac{3(36n-1)-(36n-1)}{6}<12n \\ 24n-1<\dfrac{3(36n-1)+(36n-1)}{6}<\dfrac{3(36n-1)+\sqrt{36^2n^2-3}}{6}<\dfrac{3(36n-1)+36n}{6}<24n \end{cases}$$

と評価できる．

● $12n\leq k<24n$ の場合;

$$u(k+1)-u(k)>1 \quad \left(\because\ (4.11)\right) \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

により，

$$[u(12n)],\ [u(12n+1)],\ \cdots,\ [u(24n)] \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

なる $12n+1$ 個の整数はすべて異なる．

● $0\leq k<12n$ の場合;

$$u(k+1)-u(k)<1 \quad \left(\because\ (4.11)\right) \qquad \cdots\cdots(4.15)$$

が成り立ち，$[u(0)]=0\ \wedge\ [u(12n)]=7n$ より，

$$0\leq [u(k)]\leq 7n \quad (0\leq k\leq 12n) \qquad \cdots\cdots(4.16)$$

ここで，$0\leq m\leq 7n$ なる整数 m で $[u(k)]$ の形で表せない整数 m が存在すると仮定すると，

$0\leq k<12n$ なる整数 k に対して，

$$[u(k)]\leq m-1\ \wedge\ m+1\leq [u(k+1)] \iff u(k)<m<m+1\leq u(k+1) \qquad \cdots\cdots(4.17)$$

即ち，

$$u(k+1)-u(k)>1 \qquad \cdots\cdots(4.18)$$

(4.18) は (4.15) に矛盾するので，

$$[u(0)],\ [u(1)],\ \cdots,\ [u(12n)] \qquad \cdots\cdots(4.19)$$

は 0 以上 $7n$ 以下の $7n+1$ 個の整数値をとる．

● $24n \leq k < 36n$ の場合;

$$u(k+1) - u(k) < 1 \quad \left(\because\ (4.11)\right) \qquad \cdots\cdots(4.20)$$

が成り立ち，$[u(24n)] = 20n \wedge [u(36n)] = 27n$ より，

$$20n \leq [u(k)] \leq 27n \quad (24n \leq k \leq 36n) \qquad \cdots\cdots(4.21)$$

前と同様の議論により，

$$[u(24n)],\ [u(24n+1)],\ \cdots,\ [u(36n)] \qquad \cdots\cdots(4.22)$$

は $20n$ 以上 $27n$ 以下の $7n+1$ 個の整数値をとる.

以上の議論を踏まえ,

$$[u(0)],\ [u(1)],\ \cdots,\ [u(36n)] \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

は異なる $26n+1$ 個の整数値をとる.