【S.1.1】

$f(x)=x^3-x^2$ とする.

曲線 $y=f(x)$ 上の点 A$(1,\ 0)$ における接線が再びこの曲線と交わる点を B とする.

曲線 $y=ax^2+bx+c$ と曲線 $y=f(x)$ が 2 点 A, B を共有し，更に，A, B の間にもう 1 個の共有点を持つとき，この 2 曲線の囲む領域の面積が最小となるように $a,\ b,\ c$ の値を定めよ.

【解答】

題意の接線を $y=mx+n$ とする.

接点 A : $x=1$ と交点 B : $x=\beta$ に対して，

$$x^3-x^2-mx-n=(x-1)^2(x-\beta)=x^3-(\beta+2)x^2+(2\beta+1)x-\beta \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

が成り立つ.

このとき，(1.1) 両辺の係数を比較して，

$$\beta=-1 \ \land\ m=1 \ \land\ n=-1 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

次に，放物線 $y=g(x)=ax^2+bx+c$ との A, B 以外の交点を C : $x=\gamma\ (-1<\gamma<1)$ と表せば，

$$x^3-x^2-(ax^2+bx+c)=(x+1)(x-1)(x-\gamma)=x^3-\gamma x^2-x+\gamma$$

$$\iff \begin{cases} -a-1=-\gamma & \iff & a=\gamma-1 \\ -b=-1 & \iff & b=1 \\ -c=\gamma & \iff & c=-\gamma \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

このとき，

$f(x)-g(x)=x^3-\gamma x^2-x+\gamma$ であるから，題意の面積は，

$$\int_{-1}^{\gamma}\{f(x)-g(x)\}\,\mathbf{d}x+\int_{\gamma}^{1}\{g(x)-f(x)\}\,\mathbf{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}\gamma x^3-\frac{1}{2}x^2+\gamma x\right]_{-1}^{\gamma}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}\gamma x^2-\frac{1}{2}x^2+\gamma x\right]_{\gamma}^{1}$$

$$=-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\gamma\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\gamma\right)+2\left(-\frac{1}{12}\gamma^4+\frac{1}{2}\gamma^2\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\gamma^4+\gamma^2+\frac{1}{2} \quad (-1<\gamma<1) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

このとき，

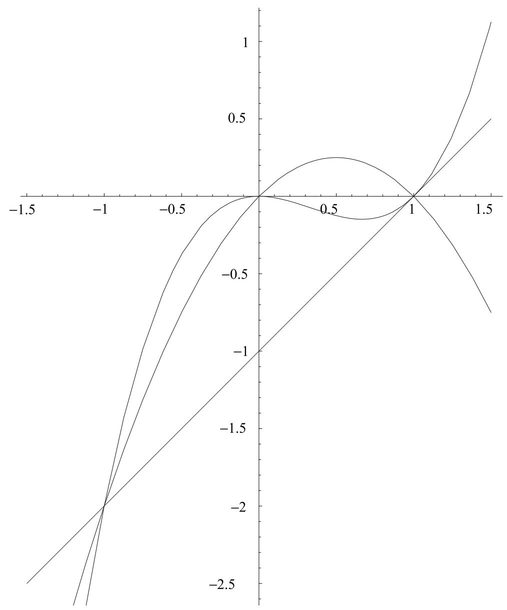
$$-\frac{1}{6}\gamma^4+\gamma^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}(\gamma^2-3)^2+2\geq-\frac{1}{6}(-3)^2+2=\frac{1}{2} \quad (\because\ \ 0\leq\gamma^2<1) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

より，題意の面積は $\gamma=0$ において最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとり，

$$a=-1 \ \land\ b=1 \ \land\ c=0 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

[Note]　$\gamma=0$ のときの図を与えるので参考にしてほしい.

$$f(x)=x^3-x^2,\quad g(x)=-x^2+x,\quad \text{接線}:y=x-1$$



【S.1.2】

ω は $0<\omega<1$ を満たす実数とする．
任意の正の整数 n に対して，$2^{n-1}\omega$ の整数部分を a_n で表し，$2^{n-1}\omega=a_n+b_n$ と置くと，

$$\begin{cases} 0 \leq b_n < \dfrac{1}{2} & (n:\mathrm{odd}) & \cdots\cdots(2.1) \\ \dfrac{1}{2} < b_n < 1 & (n:\mathrm{even}) & \cdots\cdots(2.2) \end{cases}$$

を満たす．このとき，a_n, ω を求めよ．

【解答】

a_n, b_n はそれぞれ実数 $2^{n-1}\omega$ の整数部分と小数部分である．
この定義に基づいて，$2^n\omega\ (=2a_n+2b_n)$ の小数部分 b_{n+1} は，

$$b_{n+1}=\begin{cases} 2b_n & (n:\mathrm{odd}) & \cdots\cdots(2.3) \\ 2b_n-1 & (n:\mathrm{even}) & \cdots\cdots(2.4) \end{cases} \qquad \because \begin{cases} 0 \leq 2b_n < 1 & (n:\mathrm{odd}) \\ 1 < 2b_n < 2 & (n:\mathrm{even}) \end{cases}$$

なる漸化式 (2.3), (2.4) で与えられる．
このとき，$\{b_n\}$ の奇数番号の項について，

$$b_{2n+1}=2b_{2n}-1=2\times 2b_{2n-1}-1 \iff b_{2n+1}=4b_{2n-1}-1 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

特性方程式の解 1/3 を用いて，(2.5) を変形すると，

$$b_{2n+1}-\frac{1}{3}=4\left(b_{2n-1}-\frac{1}{3}\right) \iff b_{2n-1}=\frac{1}{3}+4^{n-1}\left(\omega-\frac{1}{3}\right) \quad (\because\ b_1=\omega) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

b_n は実数 $2^{n-1}\omega$ の小数部分であるから，
(2.6) において $\omega \neq \dfrac{1}{3}$ とすると十分大なる n に対して，$0 \leq b_n < 1$ とできない．

$$\therefore\ \ \omega=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

このとき，(2.6), (2.3) により，

$$b_{2n-1}=\frac{1}{3}\ \wedge\ b_{2n}=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

以上より，

$$a_n=2^{n-1}\omega-b_n=\begin{cases} \dfrac{2^{n-1}-1}{3} & (n:odd) \\ \dfrac{2^{n-1}-2}{3} & (n:even) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

【別解】 – 二進小数表記 –

$\omega\ (0<\omega<1)$ を 2 進小数表記で,

$$\omega=[0.c_1c_2c_3\cdots] \quad \left(c_k=0 \ \vee\ c_k=1 \ \ (k=1,2,3,\cdots)\right) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

と表せば,

$$2^{n-1}\omega=[c_1c_2\cdots c_{n-1}.c_nc_{n+1}\cdots] \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

このとき, $2^{n-1}\omega$ の小数部分 b_n と $1/2$ との大小は c_n の値にのみ依存している.
従って, (2.1), (2.2) を同時に満たすための必要十分条件は,

$$c_{2k-1}=0 \ \wedge\ c_{2k}=1 \quad (k=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

このとき,

$$\omega=[0.010101\cdots]=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4^r}=\frac{1}{3} \ \wedge\ \begin{cases} b_{\text{odd}}=[0.010101\cdots]=\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4^r}=\frac{1}{3} \\ b_{\text{even}}=[0.101010\cdots]=\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{r-1}}=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

以上より,

$$a_n=2^{n-1}\omega-b_n=\begin{cases} \dfrac{2^{n-1}-1}{3} & (n:\text{odd}) \\ \dfrac{2^{n-1}-2}{3} & (n:\text{even}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

【S.1.3】

座標平面上の格子点 $(m,\ n)$ から格子点 $(m+1,\ n+1)$ への移動を U，格子点 $(m+1,\ n-1)$ への移動を D で表し，U と D を適当に繰り返すことによる格子点 P から格子点 Q への移動を P から Q への**経路**と呼ぶことにするとき，次の各問いに答えよ．ただし，n を正整数とする．

(1) $(0,\ 0)$ から $(2n,\ 0)$ への経路の個数を求めよ．

(2) $(0,\ 0)$ から $(2n,\ 0)$ への経路の内で，$(0,\ 0)$, $(2n,\ 0)$ 以外に x 軸上の点を通らない経路の個数を求めよ．

【解答】

(1) xy 平面上の経路 U, D による格子経路の全体を正の向きに 45° 回転して得られる**正方形状の経路**を乗せる平面を DU 平面と呼ぶことにする.(**下図**) このとき，題意における xy 平面上の点 $(0,\ 0)$ から $(2n,\ 0)_{xy}$ への経路の総数は，DU 平面上の点 $(0,\ 0)$ から $(n,\ n)_{\mathrm{DU}}$ への格子経路の総数と一致する．

$$\therefore\ {}_{2n}\mathrm{C}_{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

(2) 問題の条件「xy 平面上において，2 端点 $(0,\ 0)$, $(2n,\ 0)_{xy}$ 以外に x 軸上の点を通らない経路」とは，DU 平面上において，2 端点 $(0,\ 0)$, $(n,\ n)_{\mathrm{DU}}$ を除いて直線 $\mathrm{U}=\mathrm{D}$ に接触しない経路のことであるから，

(A) $(1,\ 0)_{\mathrm{DU}}$ を出発点とし，$(n,\ n-1)_{\mathrm{DU}}$ を終点とする領域 $\mathrm{U}<\mathrm{D}$ 内の経路

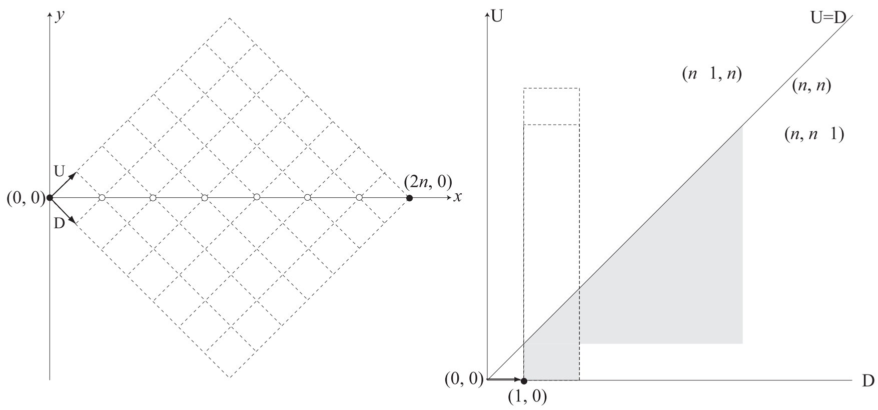
(B) $(0,\ 1)_{\mathrm{DU}}$ を出発点とし，$(n-1,\ n)_{\mathrm{DU}}$ を終点とする領域 $\mathrm{U}>\mathrm{D}$ 内の経路

の 2 通りの経路が考えられるが，直線 $\mathrm{U}=\mathrm{D}$ に関する図の対称性から (A) の場合のみを調べればよい．
まず，$(1,\ 0)_{\mathrm{DU}}$ から $(n,\ n-1)_{\mathrm{DU}}$ へのすべての経路 (直線 $\mathrm{U}=\mathrm{D}$ と共有点を持つ経路も含める) の総数は ${}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$ 通りあり，この内，直線 $\mathrm{U}=\mathrm{D}$ に接触するすべての経路に対して，最初に $\mathrm{U}=\mathrm{D}$ に接触した点から終点 $(n,\ n-1)_{\mathrm{DU}}$ に至る部分 (経路の一部分) を直線 $\mathrm{U}=\mathrm{D}$ に関して対称に移動すれば，

$$(1,\ 0)_{\mathrm{DU}}\ \longrightarrow\ \textbf{接触点}\ (k,\ k)_{\mathrm{DU}}\ \ (1\leq k\leq n-1)\ \longrightarrow\ (n-1,\ n)_{\mathrm{DU}}$$

なる経路が得られ，これら (折り返した) 経路全体は $(1,\ 0)_{\mathrm{DU}}$ から $(n-1,\ n)_{\mathrm{DU}}$ に至る格子長方形内の経路全体と 1 : 1 に対応するので，直線 $\mathrm{U}=\mathrm{D}$ と共有点を持つ経路の総数は ${}_{2n-2}\mathrm{C}_{n}$ 通りである．従って，求める経路の個数は直線 $\mathrm{U}=\mathrm{D}$ に関する対称性も考慮して，

$$2\times\left({}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}-{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n}\right)=2\times\frac{(2n-2)!}{n\{(n-1)!\}^2}=\frac{2\,{}_{2n-2}C_{n-1}}{n}$$



【S.1.4】

平面ベクトル $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ に対して,

$$\overrightarrow{a}\otimes\overrightarrow{b}=a_1b_2-a_2b_1 \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

と定めるとき, 次の問いに答えよ.

(1) 平面ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ に対して,

$$\overrightarrow{a}\otimes\overrightarrow{b}=\gamma,\quad \overrightarrow{b}\otimes\overrightarrow{c}=\alpha,\quad \overrightarrow{c}\otimes\overrightarrow{a}=\beta$$

とするとき,

$$\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ とする.

任意の平面ベクトル $\overrightarrow{d}$ は 0 以上の実数 s, t, u を用いて,

$$\overrightarrow{d}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}+u\overrightarrow{c} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

と表せることを示せ.

【解説】

(1) $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ と置けば,

$$\begin{cases}\gamma=\overrightarrow{a}\otimes\overrightarrow{b}=a_1b_2-a_2b_1\\ \alpha=\overrightarrow{b}\otimes\overrightarrow{c}=b_1c_2-b_2c_1\\ \beta=\overrightarrow{c}\otimes\overrightarrow{a}=c_1a_2-c_2a_1\end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

このとき,

$$\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}=(b_1c_2-b_2c_1)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+(c_1a_2-c_2a_1)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}+(a_1b_2-a_2b_1)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

(4.5) の x 成分を計算して,

$$\begin{aligned}&(b_1c_2-b_2c_1)a_1+(c_1a_2-c_2a_1)b_1+(a_1b_2-a_2b_1)c_1\\ &\qquad =\{(b_1c_2-b_2c_1)-c_2b_1+b_2c_1\}a_1+\{c_1b_1-b_1c_1\}a_2=0\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

同様に, y 成分を計算して,

$$(b_1c_2-b_2c_1)a_2+(c_1a_2-c_2a_1)b_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_2=0 \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(4.6), (4.7) により,

$$\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

が成り立つ.

(2) $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$ のとき，

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \ \wedge\ \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} \ \wedge\ \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0} & \cdots\cdots(4.8) \\ \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\ \text{は互いに平行でない} & \cdots\cdots(4.9) \end{cases}$$

ことを背理法で示す．

まず，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ を仮定すると，

$$\beta = \overrightarrow{c} \otimes \overrightarrow{a} = 0 \ \wedge\ \gamma = \overrightarrow{a} \otimes \overrightarrow{b} = 0$$

となり，$\beta > 0,\ \gamma > 0$ に矛盾するので，$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$.

同様に，$\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} \ \wedge\ \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0}$.

次に，$\overrightarrow{a} /\!/ \overrightarrow{b}$ を仮定すると，

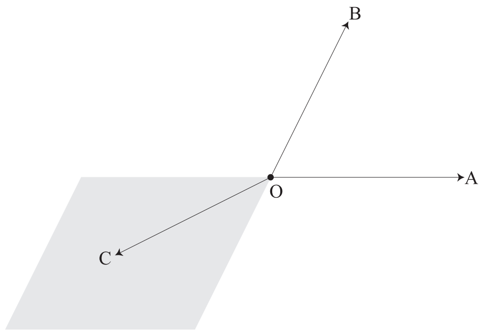
$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \ \wedge\ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}\ (k \neq 0)$$

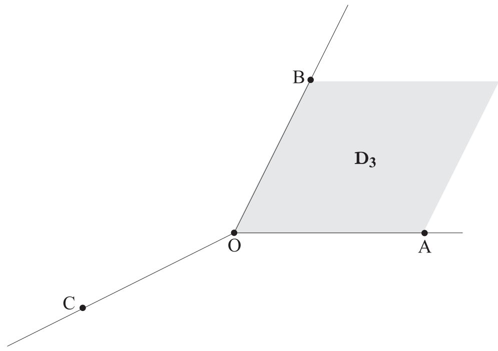
と表せ，

$$\gamma = \overrightarrow{a} \otimes \overrightarrow{b} = a_1 \times ka_2 - a_2 \times ka_1 = 0$$

となり，$\gamma > 0$ に矛盾するので，$\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ は平行でない.

同様に，$\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}$ も平行でなく，$\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a}$ も平行でない.





(4.8), (4.9) の条件の下で，O を原点として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c} \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

を満たす 3 点 A, B, C をとる.

このとき，$\gamma > 0$ であるから，(4.2) により，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

従って，(4.8), (4.9), (4.10) により，C は**上図網目領域 (境界は除く)** に存在する.

そこで，半直線 OA, OB, OC によって平面全体を**下図**のように 3 個の領域 $\mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{D}_2,\ \mathfrak{D}_3$ に分ける.

ただし，いずれの領域も境界の半直線を含むものとする.

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{d}$ を満たす点 D に対して，

- D が領域 $\mathfrak{D}_3$ に含まれる場合;

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s \geq 0,\ t \geq 0,\ u = 0) \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

と表せるので，題意は成り立つ.

- D が領域 $\mathfrak{D}_1$ に含まれる場合;

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s = 0,\ t \geq 0,\ u \geq 0) \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

と表せるので，題意は成り立つ.

- D が領域 $\mathfrak{D}_2$ に含まれる場合;

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s \geq 0,\ t = 0,\ u \geq 0) \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

と表せるので，題意は成り立つ.

以上により，任意の $\overrightarrow{d}$ は 0 以上の実数 $s,\ t,\ u$ を用いて，(4.3) の形に表せる.