【S.2.1】

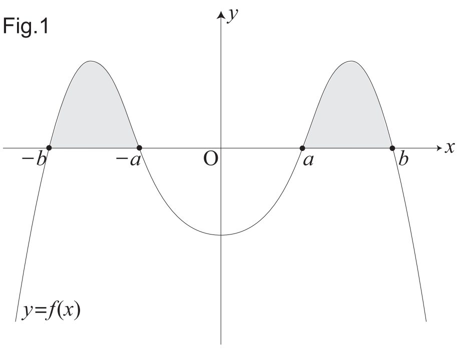
定数 $a,\, b$ を $0<a<b$ とする．
定数 $t>a$ に対して，xy 平面上の曲線

$$y=-(x+b)(x+a)(x-a)(x-t) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

と x 軸の囲む 3 つの領域の内の左側の部分の面積を $L(t)$，右側の部分の面積を $R(t)$ で表す．
(1) $t=b$ のとき，$L(t)=R(t)$ であることを示せ． (2) $L(t)=R(t)$ となる $t\ (>a)$ を求めよ．

【解答】

Fig.1



(1) (1.1) の関数を $f(x)$ と表す．
$t=b$ のとき，

$$f(x)=-(x+b)(x+a)(x-a)(x-b) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

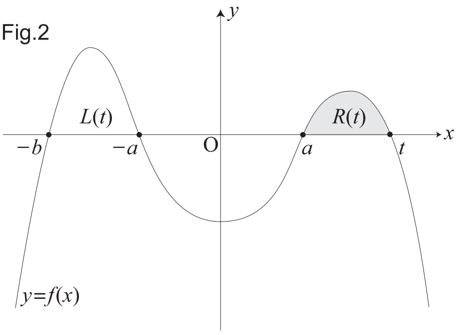
であり，

$$\begin{aligned} f(-x)&=-(-x+b)(-x+a)(-x-a)(-x-b)\\ &=-(x+b)(x+a)(x-a)(x-b)=f(x) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

が成り立つので，$f(x)$ は**偶関数**であり，
そのグラフは y 軸に関して対称である (Fig.1).
従って，(1.2) と x 軸の囲む 2 つの領域は合同な図形となり，
その面積は等しい．

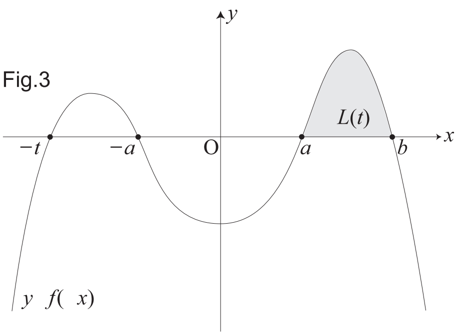
$$\therefore\ L(t)=R(t) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

Fig.2



(2) (1.2) と x 軸の囲む領域の左側の部分 (Fig.2) の面積 $L(t)$ は，
曲線 $y=f(-x)$ と x 軸の囲む領域の右側の部分 (Fig.3) の面積と
等しい．($\because\ y=f(x)\,,\, y=f(-x)$ の y 軸対称性による)
そこで，Fig.3 における $L(t)$ と Fig.2 における $R(t)$ の大小関係を
調べる．
$0<a<x$ の範囲において，

Fig.3



$$\begin{aligned} &f(x)-f(-x)\\ &=-(x+b)(x+a)(x-a)(x-t)+(x+t)(x+a)(x-a)(x-b)\\ &\qquad =2(t-b)(x+a)(x-a)x \begin{cases} >0\ \ (t>b) & \cdots\cdots(1.5)\\ <0\ \ (t<b) & \cdots\cdots(1.6) \end{cases} \end{aligned}$$

であることに注意して，

● $t>b$ の場合;

$$R(t)-L(t)=\int_a^t f(x)\,\mathbf{d}x-\int_a^b f(-x)\,\mathbf{d}x>\int_a^b \bigl(f(x)-f(-x)\bigr)\,\mathbf{d}x>0\ \ \bigl(\because\ (1.5)\bigr) \qquad \therefore\ R(t)>L(t) \quad \cdots\cdots(1.7)$$

● $t<b$ の場合;

$$R(t)-L(t)=\int_a^t f(x)\,\mathbf{d}x-\int_a^b f(-x)\,\mathbf{d}x<\int_a^t \bigl(f(x)-f(-x)\bigr)\,\mathbf{d}x<0\ \ \bigl(\because\ (1.6)\bigr) \qquad \therefore\ R(t)<L(t) \quad \cdots\cdots(1.8)$$

以上の議論により，$L(t)=R(t)\ (t>a)$ を満たすのは $t=b$ の場合に限られる．

【別解】 – 微分積分の基本定理 –

$(x+b)(x+a)(x-a) \overset{\text{put}}{=} u(x) \ \land \ R(t)-L(t) \overset{\text{put}}{=} h(t)$

$$
\begin{aligned}
h(t) &= -\int_a^t u(x)(x-t)\,\mathbf{d}x + \int_{-b}^{-a} u(x)(x-t)\,\mathbf{d}x \\
&= -\int_a^t x u(x)\,\mathbf{d}x + t\int_a^t u(x)\,\mathbf{d}x \\
&\qquad + \int_{-b}^{-a} x u(x)\,\mathbf{d}x - t\int_{-b}^{-a} u(x)\,\mathbf{d}x
\end{aligned}
$$

より,

$$
\begin{cases}
h'(t) = \displaystyle\int_a^t u(x)\,\mathbf{d}x - \int_{-b}^{-a} u(x)\,\mathbf{d}x \\
h''(t) = u(t) > 0 \ \ (t > a) \quad (\because \text{ Fig.1})
\end{cases}
\qquad \cdots\cdots(1.11)
$$

また, Fig.1 により,

$$h'(a) = -\int_{-b}^{-a} u(x)\,\mathbf{d}x < 0 \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

Fig.2 により,

$$
\begin{aligned}
h'(b) &= \int_a^b u(x)\,\mathbf{d}x - \int_{-b}^{-a} u(x)\,\mathbf{d}x \\
&= \int_a^b u(x)\,\mathbf{d}x - \int_b^a u(-y)(-\mathbf{d}y) \\
&= \int_a^b u(x)\,\mathbf{d}x - \int_a^b u(-x)\,\mathbf{d}x \\
&= 2\times\int_a^b x(x+a)(x-a)\,\mathbf{d}x > 0 \qquad \cdots\cdots(1.13)
\end{aligned}
$$

(1.11), (1.12), (1.13) により, $h'(t)$ のグラフは Fig.3.

更に, Fig.4 により,

$$
\begin{aligned}
h(a) &= \int_{-b}^{-a} u(x)(x-a)\,\mathbf{d}x \\
&= \int_{-b}^{-a} (x+b)(x+a)(x-a)^2\,\mathbf{d}x < 0 \qquad \cdots\cdots(1.14)
\end{aligned}
$$

また, (1) の結論より,

$$h(b) = R(b) - L(b) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

Fig.3 のグラフおよび (1.14), (1.15) より,

$h(t)$ のグラフは Fig.5 の通りなので,

$$h(t) = 0 \iff R(t) = L(t)$$

の解は $t = b$ に限られる.

Fig.1

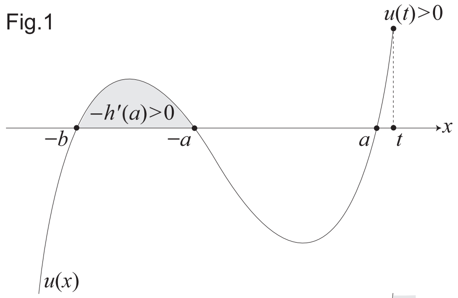


Fig.2

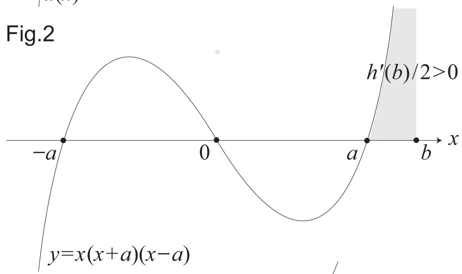


Fig.3

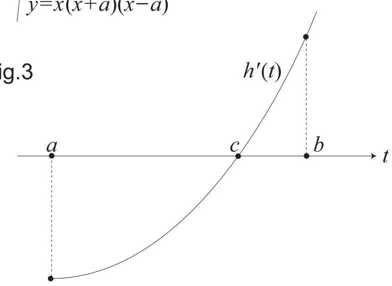


Fig.4

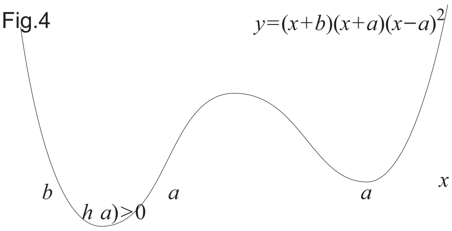


Fig.5

h $t)$

a c b t

【S.2.2】

数列 $\{a_n\}$ は $a_n \geq 0\ (\forall n)$ を満たし,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

と定義するとき,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(s_n)^k \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

が成り立つことを示せ.

【解答】

$n=1$ のとき, 明らかに不等式 (2.2) の等号が成立する.
$n=2$ のとき, 不等式 (2.2) は,

$$\begin{aligned}
&(1+a_1)(1+a_2) \leq 1+a_1+a_2+\frac{1}{2}(a_1+a_2)^2 \\
&\iff 1+a_1+a_2+a_1a_2 \leq 1+a_1+a_2+a_1a_2+\frac{1}{2}({a_1}^2+{a_2}^2) \\
&\iff 0 \leq \frac{1}{2}({a_1}^2+{a_2}^2) \qquad \cdots\cdots(2.3)
\end{aligned}$$

であるから常に成立. 等号条件は, $a_1 = a_2 = 0$
ある正整数 n に対して不等式 (2.2) の成立を仮定するとき,

$$\begin{aligned}
1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}(s_n+a_{n+1})^k &= 1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left({s_n}^k+k{s_n}^{k-1}a_{n+1}+\cdots\cdots\right) \quad (\because \text{ **二項定理**}) \\
&\geq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}{s_n}^k+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(k-1)!}{s_n}^{k-1}a_{n+1} \quad (\because \text{ 上式 4 項目以降削除}) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}{s_n}^k+a_{n+1}\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}{s_n}^r \quad \left(\because\ k-1 \overset{\text{put}}{=} r\right) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}{s_n}^k+a_{n+1}\left(1+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}{s_n}^r\right) \\
&\geq \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)+a_{n+1}\prod_{r=1}^{n}(1+a_r) \quad (\because\ (2.3)) \\
&= \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\times(1+a_{n+1})
\end{aligned}$$

即ち,

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) \leq 1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}{s_{n+1}}^k \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

従って, 数学的帰納法により, すべての正整数 n に対して不等式 (2.3) が成立する.

[Note] 不等式 (2.3) の等号成立条件は,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

であることを確認せよ.

【S.2.3】

T大学の H校舎には 4 つの学生食堂がある．仲の良い A君と B君は毎日正午，前日とは異なる食堂で昼食をとることにしており，食堂で顔を合わせたときは必ず一緒に食事をする．ただし，2 人は無作為に前日とは異なる食堂を選ぶ．2 人が H校舎に通い始めた初日の 4 月 1 日の月曜日，食堂で顔を合わせることはなかった．更に，土曜，日曜には講義がなく，従って，この 2 日間は 2 人は大学に行かない．このとき，次の各確率を求めよ．

(1) 1 週間後の 4 月 8 日の月曜日，2 人が食堂で顔を合わせ一緒に食事をする確率を求めよ．

(2) 2 人が 2 回目に食堂で顔を合わせる確率が最も高いのは何月何日か．

【解答】

ある特定の日に 2 人が顔を合わせる場合と合わせない場合のそれぞれについて，
その翌日に顔を合わせる確率と合わせない確率は次の表の通りである．

	翌日に会う	翌日に会わない
当日に会った場合	1/3	2/3
当日に会わない場合	2/9	7/9

(1) 4 月 1 日を第 1 日目として，第 n 日目に 2 人が顔を合わせる確率を p_n で表すとき，

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}(1-p_n) \iff p_{n+1} = \frac{1}{9}p_n + \frac{2}{9} \iff p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

ここで，$p_1 = 0$ であるから，

$$p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{9^{n-1}}\right)$$

即ち，第 6 日目の 4 月 8 日の月曜日に顔を合わせる確率は，

$$p_6 = \frac{14762}{59049}$$

(2) 顔を合わせる日を●，合わせない日を○で表す．

1 日目	2 日目	3 日目	……	$n-2$ 日目	$n-1$ 日目	n 日目	確率
○	●	○	……	○	○	●	$\left(\frac{7}{9}\right)^{n-4} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 \times \frac{2}{3}$
○	○	●	……	○	○	●	$\left(\frac{7}{9}\right)^{n-4} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 \times \frac{2}{3}$
……	……	……	……	……	……	……	……
○	○	○	……	●	○	●	$\left(\frac{7}{9}\right)^{n-4} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 \times \frac{2}{3}$
○	○	○	……	○	●	●	$\left(\frac{7}{9}\right)^{n-3} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{3}$

表より，第 n 日目に 2 回目の出会いをする確率 q_n は，

$$q_n = \left(\frac{7}{9}\right)^{n-3} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} + (n-3)\left(\frac{7}{9}\right)^{n-4} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{8n-10}{3^5}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-4} \quad (n \geq 4)$$

ただし，$q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = \dfrac{2}{27}$ である．
このとき，

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} > 1 \ \ (n \geqq 4) \iff \frac{7(8n-2)}{9(8n-10)} > 1 \ \ (n \geqq 4)$$

$$\iff 72n - 90 < 56n - 14 \ \wedge \ n \geqq 4 \iff 4 \leqq n < \frac{19}{4} \iff n = 4$$

従って，

$$q_3 = \frac{2}{27} = \frac{18}{243} < \frac{22}{243} = q_4 < q_5 \ \wedge \ q_5 > q_6 > q_7 > \cdots\cdots$$

より，q_5 が最大となるので，2 回目に出会う確率が最も高いのは 4 月 5 日の金曜日である．

【S.2.4】

四角形 ABCD を底面とする四角錘 OABCD は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

を満たしており,

0 でない 4 個の実数 p, q, r, s に対して，4 点 P, Q, R, S を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

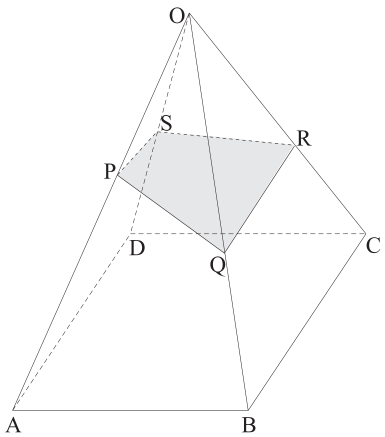
によって定めるとき，P, Q, R, S が同一平面上にあれば,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

が成り立つことを示せ.

【解説】

(4.3) より，$pqrs\neq 0$ であるから，(4.2) により,



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}\neq\vec{0} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

題意より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立であるから,
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ も 1 次独立であり，**共面条件**により,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OR}} \ \wedge\ \alpha+\beta+\gamma=1 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

と表される．($\because$ P, Q, R, S は同一平面上)
このとき，(4.2) を (4.5) に代入して,

$$s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=p\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+r\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(4.1) を (4.6) に代入して,

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=p\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+r\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立であるから,

$$s=p\alpha \wedge -s=q\beta \wedge s=r\gamma \iff \alpha=\frac{s}{p} \wedge \beta=-\frac{s}{q} \wedge \gamma=\frac{s}{r} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(4.8) を $\alpha+\beta+\gamma=1$ に代入して,

$$\frac{s}{p}-\frac{s}{q}+\frac{s}{r}=1 \iff \frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

を得る.