【S.3.1】

$f(x)=x^3-10x^2+kx\ (k>0)$ とする.

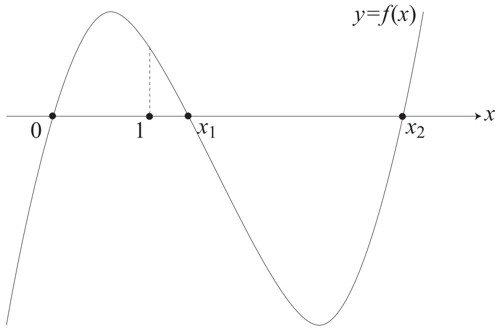
(1) 方程式 $f(x)=0$ が 3 個の実数解を持ち，それらが互いに 1 以上離れているための k の条件を求めよ.

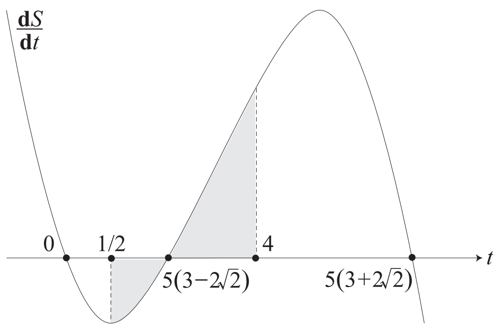
(2) (1) の条件を満たす k で，曲線 $y=f(x)$ と x 軸によって囲まれる図形の面積を最小にするものを求めよ.

【解答】

(1) $f(x)=x(x^2-10x+k)$ の第 2 因数

$$x^2-10x+k=0 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$





の解を $x=x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$ と表すとき，

$$x_1+x_2=10\ \wedge\ x_1x_2=k(>0) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

より，$x_1>0\ \wedge\ x_2>0$ である.

更に，題意の条件 (各解の距離が 1 以上) より，

$f(x)$ のグラフ (**上図**) も考慮して，

$$\begin{cases} (\textbf{判別式}:\mathrm{D})>0 & \cdots\cdots(1.3) \\ f(1)\geq 0\ \wedge\ x_2-x_1\geq 1 & \cdots\cdots(1.4) \end{cases}$$

(1.3) より，

$$\mathrm{D}/4>0 \iff k<25 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(1.4) より，

$$\begin{aligned} & k\geq 9\ \wedge\ (x_2-x_1)^2\geq 1 \\ & \iff k\geq 9\ \wedge\ (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\geq 1 \\ & \iff k\geq 9\ \wedge\ k\leq \frac{99}{4} \qquad \cdots\cdots(1.6) \end{aligned}$$

(1.5), (1.6) より，

$$9\leq k\leq \frac{99}{4} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

(2) 題意の面積を S で表す.

$$S=\int_0^{x_1} f(x)\ \mathbf{d}x-\int_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathbf{d}x=\Big[F(x)\Big]_0^{x_1}-\Big[F(x)\Big]_{x_1}^{x_2}=2F(x_1)-F(x_2) \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

$F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{10}{3}x^3+\dfrac{1}{2}kx^2$ であるから,

$$S=\frac{1}{2}{x_1}^4-\frac{20}{3}{x_1}^3+k{x_1}^2-\left\{\frac{1}{4}{x_2}^4-\frac{10}{3}{x_2}^3-\frac{1}{2}k{x_2}^2\right\} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

ここで, $x_1=5-t$, $x_2=5+t$ $(t>0)$ と置けば,

$$k=x_1x_2=(5-t)(5+t)=25-t^2 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

であるから,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}(5-t)^4-\frac{20}{3}(5-t)^3+(5-t)(5+t)\times(5-t)^2\\&\qquad-\left\{\frac{1}{4}(5+t)^4-\frac{10}{3}(5+t)^3+\frac{1}{2}(5-t)(5+t)\times(5+t)^2\right\}\\&=\frac{1}{6}(5-t)^3(3t+5)+\frac{1}{12}(5+t)^3(3t-5) \qquad \cdots\cdots(1.11)\end{aligned}$$

(1.11) を t で微分して,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{d}S}{\mathbf{d}t}&=-\frac{1}{2}(5-t)^2(3t+5)+\frac{1}{2}(5-t)^3+\frac{1}{4}(5+t)^2(3t-5)+\frac{1}{4}(5+t)^3\\&=-t(t^2-30t+25)=-t\Big(t-5\big(3-2\sqrt{2}\big)\Big)\Big(t-5\big(3+2\sqrt{2}\big)\Big) \qquad \cdots\cdots(1.12)\end{aligned}$$

(1) の結果から,

$$\begin{aligned}&9\leq k\leq\frac{99}{4}\ \wedge\ k=25-t^2\iff 9\leq 25-t^2\leq\frac{99}{4}\\&\iff\frac{1}{4}\leq t^2\leq 16\iff\frac{1}{2}\leq t\leq 4\quad\big(\because\ t>0\big) \qquad \cdots\cdots(1.13)\end{aligned}$$

(1.13) において, $\dfrac{\mathbf{d}S}{\mathbf{d}t}=0$ を満たす t は,

$$t=5\big(3-2\sqrt{2}\big) \qquad \cdots\cdots(1.14)$$

であり **(前頁下図)**, (1.14) において S は極小かつ最小となる.

$$\therefore\ k=25-25\big(3-2\sqrt{2}\big)^2=100\big(3\sqrt{2}-4\big) \qquad \cdots\cdots(1.15)$$

【S.3.2】

実数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式で定義されている．

$$a_{n+2} = a_n - a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(1) $a_1 = 26,\ a_2 = 16$ のとき，$a_n a_{n+1} < 0$ となる正整数 n の最小値を求めよ．

(2) $a_k = a_{k+1} = 0$ となるような正整数 k が存在するとき，$a_1 = a_2 = 0$ であることを示せ．

(3) $a_1,\ a_2$ が異なる整数のとき，$a_k a_{k+1} < 0$ となるような正整数 k が存在することを示せ．

【解答】

(1) 漸化式 (2.1) より，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	26	16	10	6	4	2	2	0	2	-2	$\cdots$

表により，$a_n a_{n+1} < 0$ となる最小の n は，$n = 9$ である．

(2) 漸化式 (2.1) より，

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

そこで，ある正整数 k に対して，$a_{k+1} = a_k = 0$ を仮定する．
このとき，(2.2) より $a_{k-1} = 0$ が導かれ，同様に，$a_k = a_{k-1} = 0$ から $a_{k-2} = 0$ が導かれる．
これを繰り返すことにより，$a_2 = a_1 = 0$ が導かれる．

(3) • $a_n \neq 0\ (\forall n)$ の場合;

$$a_n a_{n+1} = {a_{n+1}}^2 + a_{n+1}a_{n+2} \quad (\because\ (2.2)) \iff a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+1} = -{a_{n+1}}^2 < 0 \quad (\because\ a_{n+1} \neq 0) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

これは数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ が単調減少列であることを意味する．即ち，

$$a_1 a_2 > a_2 a_3 > \cdots > a_n a_{n+1} > a_{n+1} a_{n+2} > \cdots \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

更に，漸化式 (2.1) と $a_1,\ a_2$ が整数であることから，任意の番号 n に対して a_n は整数となり，
$a_1 a_2$ が如何なる正整数であっても単調減少な整数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ のある番号から先は必ず負となる．
従って，$a_k a_{k+1} < 0$ なる番号 k が存在することになり題意は成立する．

• $a_n = 0 \wedge a_{n+1} \neq 0$ なる番号 n が存在する場合;

$$a_{n+2} = a_n - a_{n+1} = -a_{n+1} \iff a_{n+2} = -a_{n+1} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

これは連続する 2 項が異符号であることを意味し，$a_{n+1} a_{n+2} < 0$ なる番号 n が存在することになる．
即ち，この場合も題意は成立する．

• $a_n = a_{n+1} = 0$ なる番号 n が存在する場合;
(2) の結論 $a_1 = a_2 = 0$ より，$a_1,\ a_2$ が異なる整数という条件に反するので，この場合は考慮しなくてよい．
以上により題意は示された．

【S.3.3】

1, 2, $\cdots$, n の数字を書いた n 枚のカードの組を 3 組用意する．
3 人がそれぞれ 1 組ずつ持ち，各人はその中から無作為に 1 枚のカードを抜き出し，
そのカードの数によって各人の得点を次のように 2 通りに定める．
最大数を出した人が 1 人だけのとき，その人の得点は，

(1) 自分が出した数　　(2) 他の 2 人が出した数の和

として，他の 2 人の得点は (1), (2) いずれの場合も 0 とする．
また，最大数を出した人が 2 人以上のとき，3 人の得点はすべて 0 とする．
このとき，得点の期待値を (1), (2) のそれぞれの場合について求めよ．

【解答】

(1) の場合; 勝者が k 点で勝つとき，他の 2 人は $k-1$ 点以下であるので，その確率は，

$$\frac{1}{n}\times\frac{k-1}{n}\times\frac{k-1}{n}=\frac{(k-1)^2}{n^3}\quad(k=2,3,\cdots,n)\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

求める期待値を E_1 で表すと，

$$E_1=\sum_{k=2}^{n}k\times\frac{(k-1)^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)^2\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

ここで，

$$\begin{aligned}k(k-1)^2&=(k-1)k(k+1)-2(k-1)k\\&=\frac{1}{4}\{(k-1)k(k+1)(k+2)-(k-2)(k-1)k(k+1)\}\\&\qquad-\frac{2}{3}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}\qquad\cdots\cdots(3.3)\end{aligned}$$

を用いて，

$$E_1=\frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)-\frac{2}{3}(n-1)n(n+1)\right\}=\frac{1}{12n^3}(n-1)n(n+1)(3n-2)\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

(2) の場合; 勝者が k 点，他の 2 人の得点がそれぞれ i, j 点のとき，求める期待値を E_2 で表すと，

$$E_2=\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}(i+j)\right)\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}(j+j)\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

ここで，

$$\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}(i+j)=\sum_{i=1}^{k-1}\left((k-1)i+\frac{(k-1)k}{2}\right)=(k-1)\times\frac{(k-1)k}{2}+\frac{(k-1)k}{2}\times(k-1)=k(k-1)^2\qquad\cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) を (3.5) に代入して，

$$E_2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)^2=\frac{1}{12n^3}(n-1)n(n+1)(3n-2)\ (=E_1)\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

【S.3.4】

三角形 OAB の辺 OA, OB (両端の点は除く) 上をそれぞれ動点 P, Q が次の式を満たしながら動いている.

$$2\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

このとき, 三角形 OPQ の重心 G の動き得る領域を図示せよ.

【解答】

題意より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad (0<x<1,\ 0<y<1) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

と置け, これを (4.1) に代入して,

$$(2x+2y-3)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0 \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.3) より,

$$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ\ \vee\ 2x+2y=3 \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

ここで, 三角形 OPQ の重心 G に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)=\frac{x}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{y}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

と表されるので, (4.4) によって場合分けして,

• $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ の場合;

$x/3=s,\ y/3=t$ と置けば,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad \left(0<s<\frac{1}{3},\ 0<t<\frac{1}{3}\right) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

ここで, OA を 1 : 2 に内分する点を A′, OB を 1 : 2 に内分する点を B′, 三角形 OAB の重心を G′ とすれば,

(4.6) より, G は長方形 OA′G′B′ の (周を含まない) 内部の領域を動く. (**左図影付部**)

• $\angle\mathrm{AOB}\neq 90^\circ$ の場合;

$2x/3=s,\ 2y/3=t$ と置けば,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\times\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\times\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad \left(s+t=1,\ 0<s<\frac{2}{3},\ 0<t<\frac{2}{3}\right) \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

ここで, OA の中点を M, OB の中点を N とすれば,

(4.7) より, G は平行四辺形 OA′G′B′ の (周を含まない) 内部の線分 MN 上を動く. (**右図太線部**)