【S.4.1】

3 次曲線 $\mathfrak{C} : y = x^3 - 3x^2 + ax + 4 \ (a \neq 0)$ と x 軸上の点 A(2, 0) に対して,

(1) A から $\mathfrak{C}$ に引ける接線が 2 本だけ存在するとき, a の値を求めよ.

(2) (1) で求めた a の値に対して, 2 本の接線の方程式を求めよ.

(3) (2) で求めた 2 本の接線と $\mathfrak{C}$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

【解答】

(1) $\mathfrak{C}$ 上の点 $(t,\, t^3 - 3t^2 + at + 4)$ における $\mathfrak{C}$ の接線の方程式は,

$$y = (3t^2 - 6t + a)(x - t) + t^3 - 3t^2 + at + 4 \iff y = (3t^2 - 6t + a)x - 2t^3 + 3t^2 + 4 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

この接線が点 A(2, 0) を通るので,

$$0 = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 2a - 4 \left(\overset{\text{put}}{=} u(t) \right) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

このとき,

$$u'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

より, 題意の条件 (接線が 2 本存在) より,

$$u(1) \cdot u(2) = 0 \ \land \ a \neq 0 \iff (1 - 2a)(-2a) = 0 \ \land \ a \neq 0 \iff a = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(2) (1.3) を (1.2) に代入して,

$$2t^3 - 9t^2 + 12t - 5 = 0 \iff (t-1)^2(2t-5) = 0 \iff t = 1 \ \lor \ t = \frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.3), (1.4) より, 2 本の接線の方程式は,

$$y = -\frac{5}{2}x + 5 \ (\text{接点} : x = 1), \quad y = \frac{17}{4}x - \frac{17}{2} \left(\text{接点} : x = \frac{5}{2} \right) \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

(3) $\mathfrak{C}$ の方程式と (1.5) を連立して,

$$x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 4 - \left(-\frac{5}{2}x + 5 \right) = (x-1)^3 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

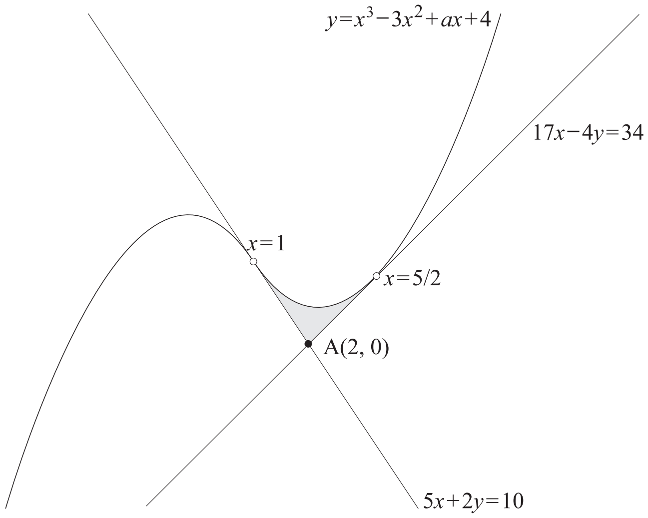
更に,

$$x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 4 - \left(\frac{17}{4}x - \frac{17}{2} \right) = (x+2)\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

従って, 求める面積は **(次頁図参照)**,

$$\begin{aligned} &\int_1^2 (x-1)^3 \, \mathbf{d}x + \int_2^{\frac{5}{2}} (x+2)\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 \mathbf{d}x \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 \right]_1^2 + \int_2^{\frac{5}{2}} \left(x - \frac{5}{2} \right)^3 \mathbf{d}x + \frac{9}{2}\int_2^{\frac{5}{2}} \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 \mathbf{d}x \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{3} \right)\left(-\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{27}{64} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

[Note] 接点 $x = 1$ は $\mathfrak{C}$ の変曲点である.


$y=x^3-3x^2+ax+4$
$17x-4y=34$
$x=1$
$x=5/2$
A(2, 0)
$5x+2y=10$

【S.4.2】

(1) kを正の整数とする.

$m=2^k$のとき, $0<n<m$を満たすすべての正整数nに対して, 二項係数${}_m\mathrm{C}_n$は偶数であることを示せ.

(2) 次の条件を満たす正整数mをすべて求めよ.

「$0\leq n\leq m$を満たすすべての整数nに対して, 二項係数${}_m\mathrm{C}_n$は奇数である」

【解答】

Pascalの三角形における各項をその偶奇に注目して書き出してみる. **(別紙図参照)**

(1) $m=2^k \land 1\leq n\leq m-1$の前提で考えるとき,

$$ {}_m\mathrm{C}_n=\frac{m}{n}\times {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}\ \ (m=2^k)\iff n\times {}_m\mathrm{C}_n=2^k\times {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

より, (2.1)の右辺は素因数2を少なくともk個持ち,

左辺の$n\ (1\leq n\leq 2^k-1)$は素因数2を高々$k-1$個しか持たない.

従って, 左辺第2因数${}_m\mathrm{C}_n$は素因数2を少なくとも1個持つことになる.

$$\therefore\ {}_m\mathrm{C}_n\equiv 0 \pmod 2 \quad (m=2^k \land 1\leq n\leq m-1) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2) $m=2^k-1$のとき, (1)の結果より,

$$ {}_{m+1}\mathrm{C}_{j+1}\equiv 0 \pmod 2 \quad (1\leq j+1\leq m \iff 0\leq j\leq m-1) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

ここで, 漸化式

$$ {}_{m+1}\mathrm{C}_{j+1}={}_m\mathrm{C}_{j+1}+{}_m\mathrm{C}_j \quad (0\leq j\leq m-1) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

を(2.3)に用いれば,

$$\begin{aligned} &{}_m\mathrm{C}_{j+1}+{}_m\mathrm{C}_j\equiv 0 \pmod 2 \quad (0\leq j\leq m-1)\\ &\qquad\iff {}_m\mathrm{C}_{j+1}\equiv -{}_m\mathrm{C}_j\equiv {}_m\mathrm{C}_j \pmod 2 \quad (0\leq j\leq m-1) \qquad \cdots\cdots(2.5)\end{aligned}$$

(2.5)は隣接項${}_m\mathrm{C}_j$, ${}_m\mathrm{C}_{j+1}\ (0\leq j\leq m-1)$の偶奇が一致することを意味している.

更に, ${}_m\mathrm{C}_0=1\equiv 1 \pmod 2$であるから, (2.5)により帰納的に,

$$ {}_m\mathrm{C}_1\equiv 1,\ {}_m\mathrm{C}_2\equiv 1,\ \cdots,\ {}_m\mathrm{C}_{m-1}\equiv 1,\ {}_m\mathrm{C}_m=1\equiv 1 \pmod 2 \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

が導けるので, $m=2^k-1$のとき, ${}_m\mathrm{C}_n\equiv 1 \pmod 2\ \ (0\leq n\leq m)$が結論できる.

次に，$m=2^k+j\ \ (0\leq j<2^k-1)$ のとき，

$$j+1\leq i\leq m-(j+1)=2^k+j-(j+1)=2^k-1 \iff j+1\leq i\leq 2^k-1 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

を満たす i に対して，

$$ {}_m\mathrm{C}_i\equiv 0 \pmod 2 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

であることを j に関する帰納法で示す．

(A) $j=0$ のとき，(2.2) により，

$$ {}_m\mathrm{C}_i\equiv 0 \pmod 2 \quad (m=2^k \wedge 1\leq i\leq 2^k-1\,(=m-1)) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

が成り立つ．

(B) ある整数 $j\geq 0$ に対して，

$$ {}_{2^k+j}\mathrm{C}_i\equiv 0 \pmod 2 \quad (j+1\leq i\leq 2^k-1) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

を仮定するとき，帰納法の仮定 (2.10) より，

$$ {}_{2^k+j+1}\mathrm{C}_i={}_{2^k+j}\mathrm{C}_i+{}_{2^k+j}\mathrm{C}_{i-1}\equiv 0 \pmod 2 \quad (j+2\leq i\leq 2^k-1)$$
$$\iff {}_{2^k+j+1}\mathrm{C}_i\equiv 0 \pmod 2 \quad (j+2\leq i\leq 2^k-1) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

従って，$m\neq 2^k-1$ のとき，

$$ {}_m\mathrm{C}_n\equiv 1 \pmod 2 \quad (0\leq n\leq m) \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

は成立しないので，求めるべき m は $m=2^k-1$ の形に限られる．

【別解】 – 母関数の利用 –

(1) ある正整数 k に対して,

$$ {}_{2^k}\mathrm{C}_n \equiv 0 \pmod 2 \quad \left(0 < \forall n < 2^k\right) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

即ち,

$$(x+1)^m = {}_m\mathrm{C}_m x^m + {}_m\mathrm{C}_{m-1} x^{m-1} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_1 x + {}_m\mathrm{C}_0 \equiv x^m + 1 \pmod 2 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

を仮定する．ここで，$2^k = m$ と略記した.

このとき，正整数 $k+1$ に対して,

$$\begin{aligned}(x+1)^{2^{k+1}} &= (x+1)^{2^k} \times (x+1)^{2^k} = (x+1)^m \times (x+1)^m \\ &\equiv (x^m+1) \times (x^m+1) \pmod 2 = x^{2m} + 2x^m + 1 \equiv x^{2m} + 1 \pmod 2\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$ {}_{2^{k+1}}\mathrm{C}_n \equiv 0 \pmod 2 \quad \left(0 < \forall n < 2^{k+1}\right) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

また,

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \equiv x^2 + 1 \pmod 2 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

であるから，$k=1$ のとき,

$$ {}_2\mathrm{C}_1 \equiv 0 \pmod 2 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

従って，帰納的にすべての正整数 k に対して,

$$ {}_{2^k}\mathrm{C}_n \equiv 0 \pmod 2 \quad \left(0 < \forall n < 2^k \ (k = 1, 2, 3, \cdots)\right) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2) 整数 $m \geq 0$ を 2 進表記で考える．即ち,

$$\left\{\begin{array}{l} m = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \cdots + a_0 \cdot 2^0 \\ \left(a_j = 0 \ \lor \ a_j = 1\right) \ \land \ 0 \leq \forall j \leq k \ \ (k = 0, 1, 2, \cdots) \end{array}\right. \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

このとき，(1) の結果を踏まえて,

$$\begin{aligned}(x+1)^m &= (x+1)^{a_k \cdot 2^k} \times (x+1)^{a_{k-1} \cdot 2^{k-1}} \times \cdots\cdots \times (x+1)^{a_0 \cdot 2^0} \\ &\equiv \left(x^{2^k}+1\right)^{a_k} \times \left(x^{2^{k-1}}+1\right)^{a_{k-1}} \times \cdots\cdots \times \left(x^{2^0}+1\right)^{a_0} \pmod 2 \qquad \cdots\cdots(2.8)\end{aligned}$$

(2.8) において,

$$a_k = a_{k-1} = \cdots = a_0 = 1 \iff m = 11\cdots1_{(2)} = 2^{k+1} - 1 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

のとき,

$$\begin{aligned}&(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \times \cdots\cdots \times \left(x^{2^k}+1\right) = x^{2^{k+1}-1} + x^{2^{k+1}-2} + \cdots\cdots + x + 1 = \sum_{r=0}^{2^{k+1}-1} x^r \\ &\iff {}_{2^{k+1}-1}\mathrm{C}_n \equiv 1 \pmod 2 \quad \left(0 \leq \forall n \leq 2^{k+1} - 1\right) \qquad \cdots\cdots(2.10)\end{aligned}$$

が成り立ち，また，このときに限られる.

従って,

$$ {}_m\mathrm{C}_n \equiv 1 \pmod 2 \quad \left(0 \leq \forall n \leq m\right) \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

が成り立つための必要十分条件は，$m = 2^k - 1 \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ である.

【S.4.3】

4 個のサイコロを同時に投げる試行を考える．
出た目の数の和が r $(4 \leq r \leq 24)$ となる確率を p_r で表し，確率変数 r の期待値を E で表す．
また，

$$(x+x^2+\cdots+x^6)^4 = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{24}x^{24} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

とする．ここで，$A_0, A_1, \cdots, A_{24}$ は定数である．
(1) $p_r = A_r/6^4$ を示せ． (2) p_6，p_{10} を求めよ． (3) E を A_r の式で表し，E の値を求めよ．

【解答】

(1) (3.1) の左辺は，

$$(x+x^2+\cdots+x^6)\times(x+x^2+\cdots+x^6)\times(x+x^2+\cdots+x^6)\times(x+x^2+\cdots+x^6)$$

の形であり，この式の各因数の一般項を順に $x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, x^{a_4}$ で表せば，
$(x+x^2+\cdots+x^6)^4$ を展開したときの一般項は，$x^{a_1+a_2+a_3+a_4}$ の形に表される．
従って，(3.1) の右辺における x^r の係数 A_r は，方程式

$$a_1+a_2+a_3+a_4 = r \ \wedge \ 1 \leq a_k \leq 6 \ (k=1, 2, 3, 4) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

の解の組 (a_1, a_2, a_3, a_4) の個数と一致する．ただし，$4 \leq r \leq 24$ である．$\left(\because A_0 = \cdots = A_3 = 0\right)$
この解 (a_1, a_2, a_3, a_4) を 4 個のサイコロを振って出た目の数と対応させることにより，

$$p_r = \frac{1}{6^4}A_r \quad (4 \leq r \leq 24) \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(2) ● $r=6$ の場合;
方程式 (3.2) の解の個数は ${}_4\mathrm{H}_2$ である．
即ち，$a_1, \cdots, a_4$ の 4 人に予め球を 1 個ずつ与え，残った 2 個の球を $a_1, \cdots, a_4$ の 4 人に分けると考える．

$$\therefore \ A_6 = {}_4\mathrm{H}_2 = {}_{4+2-1}\mathrm{C}_2 = 10 \iff p_6 = \frac{10}{6^4} = \frac{5}{648} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

● $r=10$ の場合;
方程式 (3.2) の解の個数は ${}_4\mathrm{H}_6 - 4$ である．
即ち，$a_1, \cdots, a_4$ の 4 人に予め球を 1 個ずつ与え，残った 6 個の球を 4 人に分ける方法は ${}_4\mathrm{H}_6$ 通りであるが，
各人には既に 1 個ずつ球を与えてあるので，残った 6 個の球は 1 人に最大 5 個までしか与えられない．即ち，

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (7, 1, 1, 1), \ (1, 7, 1, 1), \ (1, 1, 7, 1), \ (1, 1, 1, 7) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

の 4 組の解を ${}_4\mathrm{H}_6$ から除いて数えなければならない．

$$\therefore \ A_{10} = {}_4\mathrm{H}_6 - 4 = {}_9\mathrm{C}_3 - 4 = 80 \iff p_{10} = \frac{80}{6^4} = \frac{5}{81} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3) 確率変数 r の期待値は,

$$E = \sum_{r=4}^{24} r\,p_r = \frac{1}{6^4}\sum_{r=4}^{24} r A_r \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

ここで, (3.1) の両辺を x で微分して,

$$\begin{aligned}&4(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)(x+x^2+\cdots+x^6)^3\\&\qquad = A_1+2A_2x+3A_3x^2+\cdots\cdots+24A_{24}x^{23} = \sum_{r=4}^{24} r A_r x^{r-1} \qquad \cdots\cdots(3.8)\end{aligned}$$

(3.8) の両辺に $x=1$ を代入して,

$$(E=)\ \frac{1}{6^4}\times\sum_{r=4}^{24} r A_r = \frac{1}{6^4}\times 4(1+2+\cdots+6)6^3 = 14 \iff E = 14 \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

[Note]　関数 $(x+x^2+\cdots+x^6)^4$ が数列 $\{A_r\}_{r=4}^{24}$ の**母関数**であることは明らかである. $\{A_r\}$ の一般項の導出は困難であるが, 母関数を用いると, $\{rA_r\}$ の和の値は即座に求められる. これが母関数を利用する動機である. 一般に, 数列の和を計算する際に, その数列の母関数を利用するという手法は定石である. ただし, 本問の期待値については実はもっと単純に求められる. 即ち, 1 個のサイコロを 1 回振ったときに出る目の期待値は $\frac{1}{6}(1+2+\cdots+6)=\frac{7}{2}$ であるから, 4 個のサイコロ振ったときに出る目の和の期待値は, $4\times 7/2 = 14$ である. これは**期待値の線形性**に基づく計算である.

【S.4.4】

空間内に点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0)$ を通り，$\overrightarrow{d} = \left(0,\ 1,\ \sqrt{3}\right)$ に平行な直線 $\mathfrak{L}$ と円 $\mathfrak{C} : x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0\ (a > 0)$ がある．$\mathfrak{L}$ 上に動点 Q をとり，$\mathfrak{C}$ 上に動点 R をとるとき，線分 QR の長さの最小値を求めよ．

【解答】

通過点 P と方向ベクトル $\overrightarrow{d}$ により，

$$\mathfrak{L} : \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (-\infty < s < \infty) \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

と表示され，

$$\mathrm{Q}\left(t,\ s,\ \sqrt{3}s\right), \quad \mathrm{R}(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ 0)\ \ (0 \leq \theta < 2\pi) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

と置けるので，

$$\begin{aligned} \mathrm{QR}^2 &= (a\cos\theta - t)^2 + (a\sin\theta - s)^2 + 3s^2 \\ &= 4s^2 - 2as\sin\theta - 2at\cos\theta + t^2 + a^2 \\ &= 4\left(s - \frac{1}{4}a\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{4}a^2\left(\cos\theta - \frac{4t}{a}\right)^2 - 3t^2 + \frac{3}{4}a^2 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

● $4t/a \leq -1$ の場合;

$$\cos\theta = -1\ \wedge\ s = \frac{1}{4}a\sin\theta \iff \theta = \pi\ \wedge\ s = 0 \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

のとき QR^2 は最小となり，その最小値は,

$$\frac{1}{4}a^2\left(-1 - \frac{4t}{a}\right)^2 - 3t^2 + \frac{3}{4}a^2 = t^2 + 2at + a^2 = (t + a)^2 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

● $-1 \leq 4t/a \leq 1$ の場合;

$$\cos\theta = \frac{4t}{a}\ \wedge\ s = \frac{1}{4}a\sin\theta \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

のとき QR^2 は最小となり，その最小値は,

$$\frac{3}{4}a^2 - 3t^2 \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

● $1 \leq 4t/a$ の場合;

$$\cos\theta = 1\ \wedge\ s = \frac{1}{4}a\sin\theta \iff \theta = 0\ \wedge\ s = 0 \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

のとき QR^2 は最小となり，その最小値は,

$$\frac{1}{4}a^2\left(1 - \frac{4t}{a}\right)^2 - 3t^2 + \frac{3}{4}a^2 = t^2 - 2at + a^2 = (t - a)^2 \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

以上により,

$$\min.\mathrm{QR} = \begin{cases} |t + a| & \left(t \leq -\dfrac{1}{4}a\right) \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2 - 4t^2} & \left(-\dfrac{1}{4}a \leq t \leq \dfrac{1}{4}a\right) \\ |t - a| & \left(\dfrac{1}{4}a \leq t\right) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.10)$$