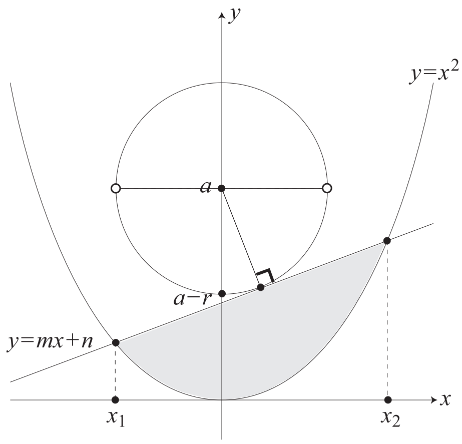
【S.5.1】

定数 a, r が次の関係を満たすとする．

$$a \geq \frac{1}{2}, \quad 0 < r < \frac{\sqrt{4a-1}}{2}$$

このとき，円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ の接線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる領域の面積の最小値を a, r の式で表せ．

【解答】



題意の不等式より，

$$r>0 \ \wedge\ a \geq \frac{1}{2} \ \wedge\ r^2-a+\frac{1}{4}<0 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

(1.1) の第 3 式は，$y=x^2$, $x^2+(y-a)^2=r^2$ が共有点を持たないことを意味する．何故なら，2 図形の方程式を連立して得られる

$$y^2-(2a-1)y+a^2-r^2=0 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

の判別式 D について，

$$\mathrm{D}=4r^2-4a+1<0 \iff r^2-a+\frac{1}{4}<0 \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

即ち，2 図形の位置関係は**右図**の通りである．

次に，直線 $y=mx+n$ が円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ と接する条件は，

$$\frac{|n-a|}{\sqrt{m^2+1}}=r \iff r^2(m^2+1)=(n-a)^2 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

また，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+n$ の交点を $x=x_1, x_2\ (x_1<x_2)$ で表せば，

題意の面積を S として，

$$S=\int_{x_1}^{x_2}(mx+n-x^2)\,\mathbf{d}x=-\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,\mathbf{d}x=\frac{1}{6}(x_2-x_1)^3 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

ここで，x_1, x_2 は 2 次方程式 $x^2-mx-n=0$ の異なる 2 実数解であるから，

$$(\text{判別式})=m^2+4n>0 \ \wedge\ x_1+x_2=m \ \wedge\ x_1x_2=-n \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.6) を (1.5) に代入して，

$$S=\frac{1}{6}(x_2-x_1)^3=\frac{1}{6}\big((x_1+x_2)^2-4x_1x_2\big)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\big(m^2+4n\big)^{\frac{3}{2}} \quad (\because\ m^2+4n>0) \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

S の最小値を求めるためには，m^2+4n の最小値を調べればよい．

(1.4) より，

$$m^2=\frac{1}{r^2}(n-a)^2-1 \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

(1.8) を用いて，

$$\begin{aligned} m^2+4n &= \frac{1}{r^2}\left\{(n-a)^2-r^2+4nr^2\right\} \\ &= \frac{1}{r^2}\left\{n^2-2(a-2r^2)n+a^2-r^2\right\} \\ &= \frac{1}{r^2}\left\{\big(n-(a-2r^2)\big)^2+4ar^2-r^2-4r^4\right\} \qquad \cdots\cdots(1.9) \end{aligned}$$

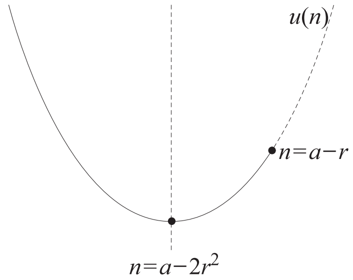
(1.9) の右辺 $\{\cdots\}$ 内の n の式を $u(n)$ で表す．即ち，

$$u(n)=\bigl(n-(a-2r^2)\bigr)^2+4ar^2-r^2-4r^4 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

$u(n)$ の最小値については，接線が下半円で接する場合のみを考慮すればよいので，
$-\infty<n\leq a-r$ で考えればよい．即ち，**下図**の様に 2 通りの場合に分けて議論する．

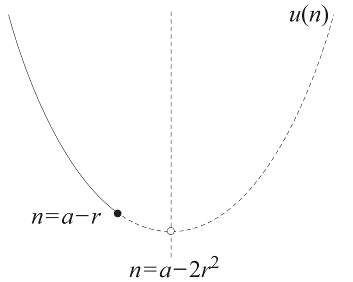
● $a-2r^2\leq a-r \iff \dfrac{1}{2}\leq r$ の場合;
グラフより，放物線の頂点 $n=a-2r^2$ で最小.

$$\therefore\ \min.S=\frac{1}{6}\bigl\{4a-1-4r^2\bigr\}^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\left(a-r^2-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$



● $a-r\leq a-2r^2 \iff (0<)\ r\leq\dfrac{1}{2}$ の場合;
グラフより，$n=a-r$ で最小.

$$\therefore\ \min.S=\frac{1}{6}\bigl\{4(a-r)\bigr\}^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\bigl(a-r\bigr)^{\frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(1.12)$$



(1.11), (1.12) より，求める最小値は，

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3}\left(a-r^2-\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} & \left(\dfrac{1}{2}\leq r\right) \\ \dfrac{4}{3}\bigl(a-r\bigr)^{\frac{3}{2}} & \left(0<r\leq\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

【S.5.2】

互いに異なる $n \geq 3$ 個の 1 より大なる実数の集合 $\mathbf{M} = \{a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n\}$ が次の性質を持つ.

$$\mathbf{M}\text{ の異なる要素 } a_j,\, a_k \text{ に対して, } \frac{a_j}{a_k},\ \frac{a_k}{a_j} \text{ の一方が必ず } \mathbf{M} \text{ に属する}$$

このとき, $a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n$ は, その順序を適当に入れ替えることにより等比数列になることを示せ.

【解答】

$\mathbf{M}$ の要素を小さい順に並べ替えたものを $\{b_k\}$ とする. 即ち,

$$(1<)\, b_1 < b_2 < \cdots < b_n \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

題意より,

$$\frac{b_2}{b_1} \in \mathbf{M} \ \wedge\ 1 < \frac{b_2}{b_1} < b_2 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

が成り立つので,

$$\frac{b_2}{b_1} = b_1 \iff b_2 = {b_1}^2 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

更に,

$$\frac{b_3}{b_1} \in \mathbf{M} \ \wedge\ b_1 = \frac{b_2}{b_1} < \frac{b_3}{b_1} < b_3 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

が成り立つので,

$$\frac{b_3}{b_1} = b_2 \iff b_3 = b_2 \cdot b_1 = {b_1}^3 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

また, ある番号 $k \geq 2$ に対して,

$$\frac{b_k}{b_1} = b_{k-1} \ \wedge\ b_k = {b_1}^k \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

を仮定すると,

$$\frac{b_{k+1}}{b_1} \in \mathbf{M} \ \wedge\ b_{k-1} = \frac{b_k}{b_1} < \frac{b_{k+1}}{b_1} < b_{k+1} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

が成り立つので,

$$\frac{b_{k+1}}{b_1} = b_k \iff b_{k+1} = b_k \cdot b_1 = {b_1}^{k+1} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

従って, $\{b_k\}$ は初項 b_1, 公比 b_1 の**等比数列**であり, 題意は示された.

【S.5.3】

箱の中に青，赤，黄のカードがそれぞれ 3 枚，2 枚，1 枚合計 6 枚入っている．1 回の試行において，箱の中からカードを 1 枚取り出し，取り出したカードと同色のカードを 1 枚加えて再び箱の中に戻す．従って，n回の試行を完了したときには $n+6$ 枚のカードが箱の中にあることになる．n回目の試行が完了したとき，箱の中にある青のカードの枚数の期待値 E_n を求めよ．

【解答】 – 期待値の漸化式 –

n回の試行後，箱の中の青の枚数が k枚である確率を $p_n(k)$ で表す．
ただし，$n=0,\,1,\,2,\,\cdots\ \wedge\ k=3,\,4,\,\cdots,\,n+3$ とする．
このとき，n回の試行後の青の枚数の期待値 E_n は次の式で定義される．

$$E_n=\sum_{k=3}^{n+3}k\,p_n(k)\quad(n=0,1,2,\cdots)\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

(3.1) から E_n の漸化式を導く；

$$E_{n+1}=\sum_{k=3}^{n+4}k\,p_{n+1}(k)=\sum_{k=3}^{n+4}k\left\{(\frac{k-1}{n+6}\times p_n(k-1)+\left(1-\frac{k}{n+6}\right)\times p_n(k)\right\}\quad(n\geq 0)\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

ここで，$(k-1)/(n+6)$ は n回の試行後に青が $k-1$ 枚になっている前提 $p_n(k-1)$ で，$n+1$ 回目の試行で青を取り出す確率を表し，$1-k/(n+6)$ は n回の試行後に青が k枚になっている前提 $p_n(k)$ で，$n+1$ 回目の試行で青を取り出さない確率を表す．
このとき，

$$\begin{aligned}E_{n+1}&=\sum_{r=2}^{n+3}\frac{(r+1)r}{n+6}\times p_n(r)+\sum_{k=3}^{n+4}k\left(1-\frac{k}{n+6}\right)\times p_n(k)\quad\left(\because\ k-1\overset{\text{put}}{=}r\right)\\&=\sum_{k=3}^{n+3}\left(\frac{k(k+1)}{n+6}+k-\frac{k^2}{n+6}\right)\times p_n(k)\quad\left(\because\ p_n(n+4)=p_n(2)=0\right)\\&=\sum_{k=3}^{n+3}\frac{n+7}{n+6}\times k\,p_n(k)=\frac{n+7}{n+6}E_n\qquad\therefore\ \frac{E_{n+1}}{n+7}=\frac{E_n}{n+6}\quad(n\geq 0)\qquad\cdots\cdots(3.3)\end{aligned}$$

ここで，$E_0=3\times p_0(3)=3$ であるから，

$$\frac{E_n}{n+6}=\frac{E_{n-1}}{n+5}=\cdots=\frac{E_0}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\iff E_n=\frac{1}{2}(n+6)\quad(n\geq 0)\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

[Note] 本問は取り出したカードと同色のカードを 1 枚追加するという設定であるが，一般に，同色のカードを m枚追加する設定でも計算は同様であり，$E_n=\dfrac{1}{2}(nm+6)$ が得られる．即ち，各回の試行において青が取り出される確率は常に 1/2である．ここで，$m=0$ とすれば復元抽出となり，各回の試行で青が取り出される確率は常に 1/2 である．また，$m=-1$ の場合は**くじ引きの確率**であり，各回の試行で青が取り出される確率は同様に常に 1/2 である．

【別解】 – 対等性を利用 –

n 回の試行後，箱の中の青の枚数が k 枚である確率を $p_n(k)$ で表す．**(前の解答と同様の設定)**
n 回の試行後，箱の中に青が k 枚入っている確率と「非青」が k 枚入っている確率は等しいので，

$$p_n(k) = p_n(n+6-k) \quad (k = 3,\ 4,\ \cdots,\ n+3) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

このとき，

$$E_n = \sum_{k=3}^{n+3} k\,p_n(k) = \sum_{r=3}^{n+3}(n+6-r)p_n(n+6-r) \quad (\because\ k = n+6-r)$$
$$= \sum_{r=3}^{n+3}(n+6-r)p_n(r) \quad (\because\ (3.5)) = \sum_{k=3}^{n+3}(n+6-k)p_n(k) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.6) の右辺を用いて E_n を再定義すると，

$$E_n = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=3}^{n+3} k\,p_n(k) + \sum_{k=3}^{n+3}(n+6-k)p_n(k)\right\} = \frac{n+6}{2}\sum_{k=3}^{n+3} p_n(k) = \frac{n+6}{2} \quad \left(\because\ \sum_{k=3}^{n+3} p_n(k) = 1\right) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

従って，(3.4) が導かれる．

【別解】 – 確率の直接計算 –

n 回の試行後，
箱の中の青の枚数が $k+3$ 枚になっている (k 枚の青が増えた) 確率を $p_n(k+3)$ $(0 \leq k \leq n)$ で表せば，

$$p_n(k+3) = \frac{{}_n\mathrm{C}_k \times 3\cdot 4\cdots(k+2) \times 3\cdot 4\cdots(n-k+2)}{6\times 7\times\cdots\times(n+5)} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

ここで，${}_n\mathrm{C}_k$ は n 回の試行の過程で，どの k 回で青を取り出すかを表す場合の数で，例えば，

●●●○○○||●●●…●●○○…○

という取り出し方を考えた場合，●の取り出し方は，

$$3\times 4\times 5\times\cdots\times(k+2) \text{ (通り)}$$

○の取り出し方は，

$$3\times 4\times 5\times\cdots\times(n-k+2) \text{ (通り)}$$

従って，

$$p_n(k+3) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{(k+2)!\,(n-k+2)!\,5!}{(2!)^2\,(n+5)!} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

となるので，(3.9) を整理して，

$$p_n(k+3) = \frac{30(k+1)(k+2)(n+1-k)(n+2-k)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

このとき，期待値 E_n は，

$$E_n = \sum_{k=0}^{n}(k+3)p_n(k+3)$$
$$= \frac{30}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \times \sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)(k+3)(n+1-k)(n+2-k) \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

ここで,

$$(n+1-k)(n+2-k)=(n+1)(n+2)-(2n+3)k+k^2=(n+1)(n+2)-(2n+7)k+k(k+4) \quad \cdots\cdots(3.12)$$

より,

$$\begin{aligned}&(k+1)(k+2)(k+3)(n+1-k)(n+2-k)\\&\qquad=(n+1)(n+2)\times(k+1)(k+2)(k+3)-(2n+7)\times k(k+1)(k+2)(k+3)\\&\qquad\qquad+k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \quad \cdots\cdots(3.13)\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)(k+3)\\&\qquad=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left\{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-k(k+1)(k+2)(k+3)\right\}\\&\qquad=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \quad \cdots\cdots(3.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)\\&\qquad=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\left\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\right\}\\&\qquad=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \quad \cdots\cdots(3.15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\\&\qquad=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}\left\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\right\}\\&\qquad=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \quad \cdots\cdots(3.16)\end{aligned}$$

(3.13), (3.14), (3.15), (3.16) により,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)(k+3)(n+1-k)(n+2-k)\\&\qquad=(n+1)(n+2)\times\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-(2n+7)\times\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\\&\qquad\quad+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)=\frac{1}{60}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6) \quad \cdots\cdots(3.17)\end{aligned}$$

(3.11), (3.17) により,

$$E_n=\frac{30}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\times\frac{1}{60}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)=\frac{n+6}{2} \quad \cdots\cdots(3.18)$$

【S.5.4】

三角形 ABC の垂心を H として，$\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\vec{c}$ と略記する．
このとき，次の (4.1), (4.2), (4.3) に対して，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{\mathrm{HO_1}}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a} & \cdots\cdots(4.1) \\ 2\overrightarrow{\mathrm{HO_2}}=\vec{c}+\vec{a}-\vec{b} & \cdots\cdots(4.2) \\ 2\overrightarrow{\mathrm{HO_3}}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} & \cdots\cdots(4.3) \end{cases}$$

(1) (4.1), (4.2), (4.3) が成り立つとき，H が三角形 $\mathrm{O_1O_2O_3}$ の外心であることを示せ．
(2) (4.1), (4.2), (4.3) で定まる $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_3}$ は，それぞれ三角形 HBC, HCA, HAB の外心であることを示せ．

【解答】

(1) H は三角形 ABC の垂心であるから，

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \\ &\iff \vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0 \\ &\iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\overset{\text{put}}{=}k \qquad \cdots\cdots(4.4) \end{aligned}$$

このとき，(4.1), (4.4) により，

$$4\left|\overrightarrow{\mathrm{HO_1}}\right|^2=\left|\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

同様に，(4.2), (4.3), (4.4) により，

$$4\left|\overrightarrow{\mathrm{HO_2}}\right|^2=4\left|\overrightarrow{\mathrm{HO_3}}\right|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(4.5), (4.6) により，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{HO_1}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{HO_2}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{HO_3}}\right| \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(4.7) により，H は三角形 $\mathrm{O_1O_2O_3}$ の外心である．

(2) (4.1) によって定まる $\mathrm{O_1}$ が三角形 HBC の外心であること，即ち，

$$\mathrm{O_1H}=\mathrm{O_1B}=\mathrm{O_1C} \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

が成り立つことを示す．

$$2\overrightarrow{\mathrm{O_1B}}=2\overrightarrow{\mathrm{HB}}-2\overrightarrow{\mathrm{HO_1}}=2\vec{b}-\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} \quad \left(\because\ (4.1)\right) \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

(4.3), (4.9) により，

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1B}}=\overrightarrow{\mathrm{HO_3}} \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

同様に，

$$2\overrightarrow{\mathrm{O_1C}}=2\overrightarrow{\mathrm{HC}}-2\overrightarrow{\mathrm{HO_1}}=2\vec{c}-\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c} \quad \left(\because\ (4.1)\right) \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

(4.2), (4.11) により，

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1C}}=\overrightarrow{\mathrm{HO_2}} \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

(4.7), (4.10), (4.12) により，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1H}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{O_1B}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{O_1C}}\right| \iff \mathrm{O_1H} = \mathrm{O_1B} = \mathrm{O_1C} \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

(4.13) により，$\mathrm{O_1}$ が三角形 HBC の外心であることが示された.

同様にして，(4.2), (4.3) によって定まる $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_3}$ が三角形 HCA, HAB の外心であることが示される.