【W.1.1】

円に内接する四辺形 ABCD において,

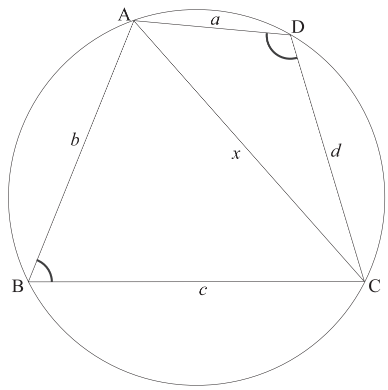
$$\mathrm{AB}=b,\ \mathrm{BC}=c,\ \mathrm{CD}=d,\ \mathrm{DA}=a$$

とするとき，この四辺形の面積は,

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \left(a+b+c+d=2s\right)$$

で与えられることを**余弦定理**を用いて示せ.

【解答】



四辺形 ABCD の対角線 AC に対して，AC $= x$ と置く.
三角形 ACD, ABC の各々に対して**余弦定理**を用いて,

$$\begin{cases} x^2=a^2+d^2-2ad\cdot\cos D & \cdots\cdots(1.1) \\ x^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos B & \cdots\cdots(1.2) \end{cases}$$

(1.1), (1.2) から x を消去して,

$$a^2+d^2-(b^2+c^2)=2ad\cdot\cos D-2bc\cdot\cos B$$
$$\iff \frac{1}{2}\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)=ad\cdot\cos D-bc\cdot\cos B \quad \cdots\cdots(1.3)$$

一方，四辺形 ABCD の面積を S と表せば,

$$S=\frac{1}{2}ad\cdot\sin D+\frac{1}{2}bc\cdot\sin B \iff 2S=ad\cdot\sin D+bc\cdot\sin B \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(1.3), (1.4) の両辺の 2 乗和をとり,

$$a^2d^2+b^2c^2-2abcd\left(\cos B\cos D-\sin B\sin D\right)=\frac{1}{4}\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2+4S^2 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

ここで，**加法定理**と**半角公式**を用いて,

$$\cos B\cos D-\sin B\sin D=\cos(B+D)=2\cos^2\frac{B+D}{2}-1 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.6) を (1.5) 左辺に代入して,

$$4(a^2d^2+b^2c^2)+8abcd-16abcd\cdot\cos^2\frac{B+D}{2}=\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2+16S^2 \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

(1.7) の左辺は,

$$4(a^2d^2+b^2c^2)+8abcd-16abcd\cdot\cos^2\frac{B+D}{2}=4(ad+bc)^2-16abcd\cdot\cos^2\frac{B+D}{2} \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

とまとめられるので,

$$16S^2=4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-16abcd\cdot\cos^2\frac{B+D}{2} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

ここで，(1.9) 右辺において，

$$\begin{aligned}
4(ad+bc)^2-\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2 &= \left\{2(ad+bc)+a^2+d^2-b^2-c^2\right\}\left\{2(ad+bc)-a^2-d^2+b^2+c^2\right\} \\
&= \left\{(a+d)^2-(b-c)^2\right\}\left\{(b+c)^2-(a-d)^2\right\} \\
&= (a+d-b+c)(a+d+b-c)(b+c-a+d)(b+c+a-d) \\
&= (2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)(2s-2d) \quad \left(\because\ a+b+c+d=2s\right) \\
&= 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)
\end{aligned}$$

と整理して，

$$\begin{aligned}
&S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cdot\cos^2\frac{B+D}{2} \\
&\qquad\iff\ S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cdot\cos^2\frac{B+D}{2}} \qquad \cdots\cdots(1.10)
\end{aligned}$$

四辺形 ABCD が円に内接するとき，$B+D=\pi$ であるから，

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

[Note]　(1.10) において $d\to 0$ とした極限

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s} \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

は Heron **の公式**である．

【W.1.2】

すべての正整数 $n \geq 2$ に対して，

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, \quad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

が成り立つとき，不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

が成り立つことを示せ．また，等号の成立条件を調べよ．

【解答】 – Chebysev の不等式 –

$n = 2$ の場合;

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2} a_k \times \sum_{k=1}^{2} b_k - 2\sum_{k=1}^{2} a_k b_k \\
&\qquad = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) = a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_1 - a_2 b_2 \\
&\qquad = a_1(b_2 - b_1) - a_2(b_2 - b_1) = -(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \leq 0 \quad \left(\because\ (2.1)\right)
\end{aligned}$$

等号は，$a_1 = a_2 \lor b_1 = b_2$ のときに限り成立．

$$\therefore \ \sum_{k=1}^{2} a_k \times \sum_{k=1}^{2} b_k \leq 2 \sum_{k=1}^{2} a_k b_k \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

次に，ある正整数 $n \geq 2$ に対して，$(2.1) \land (2.2)$ の成立を仮定する．

同時に，(2.2) の等号条件を

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \ \lor \ b_1 = b_2 = \cdots = b_n \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

と仮定するとき，

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \ \land \ b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq b_{n+1} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

なる数列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} a_k \times \sum_{k=1}^{n+1} b_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}\right) - (n+1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k - n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - n\, a_{n+1} b_{n+1} \\
&\leq a_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k - n\, b_{n+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} a_k\left(b_{n+1} - b_k\right) \quad \left(\because\ (2.2)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{n+1}\left(b_k - b_{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} a_k\left(b_k - b_{n+1}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{n+1})(b_k - b_{n+1}) \leq 0 \quad \left(\because\ (2.5)\right)
\end{aligned}$$

即ち，

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \times \sum_{k=1}^{n+1} b_k \leq (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

ここで，(2.6) の等号成立は，(2.4) の成立に加えて，n 個の要素

$$(a_k - a_{n+1})(b_k - b_{n+1}) \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

がすべて 0 になるときである．即ち，

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1} \ \vee \ b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b_{n+1} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

以上により帰納法は完結し，すべての正整数 $n \geq 2$ に対して，

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \ \wedge \ b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \ \wedge \ \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

が成り立ち，不等式の等号成立は，

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \ \vee \ b_1 = b_2 = \cdots = b_n \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

のときに限られる．

[Note]　Chebysev **の不等式**の原型は，

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \times \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leq \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \\ a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \ \wedge \ b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \end{cases}$$

即ち，**平均の積**と**積の平均**との大小関係を示すものである．

[Prob]　(87 **東大**)
$n \geq 2$ とする．

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \ \wedge \ y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

を満たす数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が与えられている．
$\{y_n\}$ を並べ替えて得られるどのような数列 $\{z_n\}$ に対しても

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2$$

が成り立つことを示せ．

【W.1.3】

整数係数の n 次式

$$u(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad (n>1)$$

について，(1) および (2) を示せ．

(1) 有理数 α が方程式 $u(x)=0$ の解ならば，α は整数である．

(2) ある正整数 $k>1$ に対して，k 個の整数

$$u(1),\ u(2),\ \cdots,\ u(k)$$

のいずれも k で割り切れなければ，方程式 $u(x)=0$ は有理数の解を持たない．

【解答】

(1) 方程式 $u(x)=0$ の有理数解 α を

$$\alpha=\frac{q}{p} \quad \bigl(p:\text{正整数},\ q:\text{整数},\ \gcd(p,\ q)=1\bigr) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

と置くとき，

$$\begin{aligned} u(\alpha)=0 \iff & \left(\frac{q}{p}\right)^n+a_1\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\times\frac{q}{p}+a_n=0 \\ \iff & q^n=-\bigl\{a_1\,pq^{n-1}+a_2\,p^2q^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\,p^{n-1}q+a_n\,p^n\bigr\} \\ \iff & q^n=-p\bigl\{a_1\,q^{n-1}+a_2\,pq^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\,p^{n-2}q+a_n\,p^{n-1}\bigr\} \qquad \cdots\cdots(3.2) \end{aligned}$$

ここで，$k=1,2,\cdots,n$ に対して，

$$a_k:\text{整数},\ \ p:\text{正整数},\ \ q:\text{整数}$$

であるから，(3.2) の右辺第二因数は整数であり，右辺は p の倍数である．

一方，$\gcd(p,\ q)=1$ より，q はその因数に p を持たないので，(3.2) の成立は $p=1$ のときに限られる．

$$\therefore\ \ \alpha=q:\text{整数} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

(2) 題意より，modulus k の下に，

$$u(1)\not\equiv 0,\ \ u(2)\not\equiv 0,\ \ \cdots,\ \ u(k)\equiv u(0)\not\equiv 0 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

の前提で考える．

任意の整数 x に対して，

$$x\equiv r \quad (r=0,1,2,\cdots,k-1) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

と表せるので，

$$u(x)=x^n+a_1\,x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\,x+a_n\equiv r^n+a_1\,r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\,r+a_n=u(r)\not\equiv 0 \quad (\because\ (3.5)) \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

即ち，

$$u(x)\not\equiv 0 \quad (\forall x:\text{整数}) \implies u(x)\neq 0 \quad (\forall x:\text{整数}) \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(3.7) により，$u(x)=0$ は整数を解に持たないので，有理数を解に持たない．

[Note]　整数 n と正整数 k に対して,

$$n = 0 \implies n \equiv 0 \pmod{k}$$

の対偶は,

$$n \not\equiv 0 \pmod{k} \implies n \neq 0$$

即ち, (1) により, **有理数を解に持つとき整数解を持つ**ことが言えたので,
(2) において, **整数を解に持たないならば有理数を解に持たない**と結論できる.

【W.1.4】

数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 1$ であり，$n \geq 2$ に対して a_n は次の条件を満たす最小の正整数とする．

- a_n は $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1}$ のいずれの項とも異なる．
- $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1}$ から重複なくどのように項を取り出しても，それらの和は a_n に等しくならない．

このとき，一般項 a_n を求めよ．

【解答】

$a_1 = 1$ および題意の条件から各項を計算すると，

$$a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 8,\ a_5 = 16,\ \cdots \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

が導かれるので，一般に，

$$a_n = 2^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

が成り立つと予想される．
そこで，ある番号 n に対して，

$$a_1 = 2^0,\ a_2 = 2^1,\ a_3 = 2^2,\ \cdots,\ a_n = 2^{n-1} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

を仮定する．
ここで，(4.3) の正整数を 2 進表記して，

$$a_1 = 1,\ a_2 = 10,\ a_3 = 100,\ \cdots,\ a_n = 10\cdots0\ (\text{下 } n-1 \text{ 桁がすべて } 0) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

と表せば，(4.4) の n 個の整数の適当な和によって，

$$1_{(2)} = 1 \text{以上}, \quad 11\cdots1_{(2)} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^0 = 2^n - 1 \text{以下}$$

のすべての整数を漏れなく表せる．即ち，0 を除く n 桁以下のすべての 2 進数を表せる．
従って，題意の条件により，

$$a_{n+1} = 10\cdots0 = (\text{下 } n \text{ 桁がすべて } 0 \text{ の } 2 \text{ 進数}) = 2^n \iff a_{n+1} = 2^n \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

即ち，(4.3) の仮定から (4.5) の結論が導けたので帰納法は完結する．

[Note] $\{a_n\}$ を二進表記することにより，任意の k 項の和が視覚的に捉えられることに注意してほしい．
整数の和を視覚的に直観的に捉えるために二進数を導入するという手法は，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を 2 の剰余で考えるという群数列の問題 [S.4.3] でも威力を発揮した．

[Prob] (2000 **金沢大**)

整数 $i,\ j,\ k$ に対して，

$$0 \leq i \leq j \leq k \leq n \ \wedge\ n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

が満たされるとき，

$$N = 2^i + 2^j + 2^k$$

の表す異なる整数 N の個数を n の式で表せ．

[答] $\dfrac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 14n + 6)$