【W.3.1】

xy 平面上の領域 $\mathfrak{D}$ を

$$\mathfrak{D}:\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2\geq\frac{r^2}{4}\ \wedge\ (x-r)^2+y^2\leq r^2\ \wedge\ y\geq 0\ \wedge\ (x,\,y)\neq(0,\,0)\quad(r>0)\qquad\cdots\cdots(1.1)$$

によって定義し，この平面上の反転

$$\mathsf{T}:x'=\frac{r^2x}{x^2+y^2}\ \wedge\ y'=\frac{r^2y}{x^2+y^2}\quad(r>0)\qquad\cdots\cdots(1.2)$$

について考える．

(1) 領域 $\mathfrak{D}$ の反転 T による像の領域を図示せよ．

(2) 2 個の円

$$\mathfrak{C}_{in}:\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2=\frac{r^2}{4},\quad \mathfrak{C}_{out}:(x-r)^2+y^2=r^2\quad(r>0)\qquad\cdots\cdots(1.3)$$

と x 軸に同時に接する円を $\mathfrak{C}_1$ とする．更に，$\mathfrak{C}_1$ と $\mathfrak{C}_{in}$, $\mathfrak{C}_{out}$ に同時に接する円を $\mathfrak{C}_2$ とし，以下，$\mathfrak{C}_n$ と $\mathfrak{C}_{in}$, $\mathfrak{C}_{out}$ に同時に接する円を $\mathfrak{C}_{n+1}$ と帰納的に定めるとき，$\mathfrak{C}_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の中心の座標と半径を求めよ．

【解答】

(1) (1.2) を逆に解いて，

$$\mathsf{T}^{-1}:x=\frac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2}\ \wedge\ y=\frac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2}\quad(r>0)\qquad\cdots\cdots(1.4)$$

(1.4) を (1.1) の第一式に代入して，

$$\left(\frac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2}-\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2}\right)^2\geq\frac{r^2}{4}$$

$$\iff\ \frac{r^4}{(x')^2+(y')^2}-\frac{r^3x'}{(x')^2+(y')^2}\geq 0\ \iff\ r\geq x'\ \wedge\ (x',\,y')\neq(0,\,0)\qquad\cdots\cdots(1.5)$$

(1.4) を (1.1) の第二式に代入して，

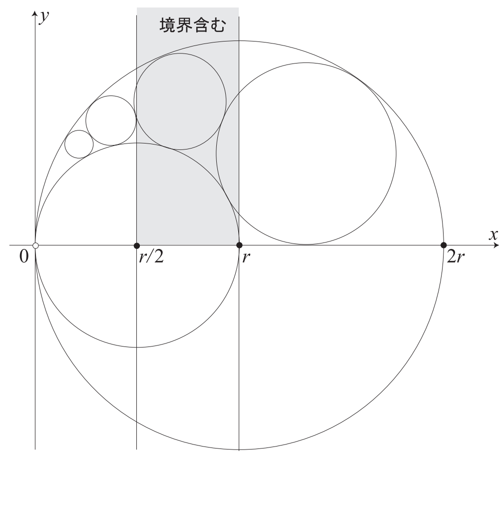
$$\left(\frac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2}-r\right)^2+\left(\frac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2}\right)^2\leq r^2\ \iff\ \frac{r^4}{(x')^2+(y')^2}-\frac{2r^3x'}{(x')^2+(y')^2}\leq 0\ \iff\ \frac{r}{2}\leq x'\qquad\cdots\cdots(1.6)$$

(1.4) を (1.1) の第三式に代入して，

$$\frac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2}\geq 0\ \iff\ y'\geq 0\ \wedge\ (x',\,y')\neq(0,\,0)\qquad\cdots\cdots(1.7)$$

(1.5), (1.6), (1.7) により，次の領域を得る．

$$\mathfrak{D}':\ \frac{r}{2}\leq x\leq r\ \wedge\ y\geq 0\qquad\cdots\cdots(1.8)$$



(2) Tによって，反転中を通らない円は，反転中心を通らない円に移り，接点は接点に移る．
即ち，円 $\mathfrak{C}_n$は**下図**の円 $\mathfrak{C}_n{}'$に移るので，

$$\mathfrak{C}_n{}' : \left(x' - \frac{3r}{4}\right)^2 + \left(y' - \frac{r}{4}(2n-1)\right)^2 = \frac{r^2}{16} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

(1.2) に (1.9) を代入して，

$$\left(\frac{r^2 x}{x^2+y^2} - \frac{3r}{4}\right)^2 + \left(\frac{r^2 y}{x^2+y^2} - \frac{(2n-1)r}{4}\right)^2 = \frac{r^2}{16}$$

$$\iff \frac{r^2}{x^2+y^2} - \frac{3rx}{2(x^2+y^2)} - \frac{(2n-1)ry}{2(x^2+y^2)} + \frac{4n^2-4n+9}{16} = 0$$

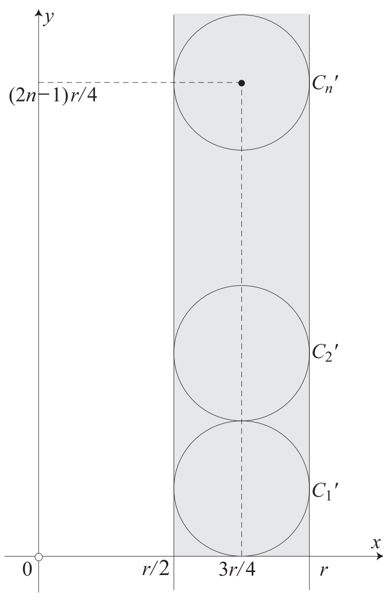
$$\iff x^2+y^2 - \frac{24rx+8(2n-1)ry}{4n^2-4n+9} + \frac{16r^2}{4n^2-4n+9} = 0 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

(1.10) を標準型にして，

$$\left(x - \frac{12r}{4n^2-4n+9}\right)^2 + \left(y - \frac{4(2n-1)r}{4n^2-4n+9}\right)^2 = \frac{16r^2}{(4n^2-4n+9)^2} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

(1.11) により，$\mathfrak{C}_n$の中心の座標と半径は，

$$\left(\frac{12r}{4n^2-4n+9}, \frac{4(2n-1)r}{4n^2-4n+9}\right), \quad \frac{4r}{4n^2-4n+9} \qquad \cdots\cdots(1.12)$$



[Note] – 反転に関する諸定理 –

- 反転中心を通る直線は，それ自身に移る．即ち，反転中心を通る直線は**不動直線**である．
- 反転中心を通る円は反転中心を通らない直線に移る．逆に，反転中心を通らない直線は反転中心を通る円に移る．即ち，両者は同値である．
- 反転中心を通らない円は反転中心を通らない円に移る．特に，反転円自身は不動点の集合としての**不動円**である．また，反転円と直交する円も**不動円**である．ただし，不動点の集合としての不動円ではない．

【W.3.2】

t を実数とする関数 $u(x)=(x-1)(x-2)(x-t)$ に対して，$u'(x)=0$ の 2 解を $a,\ b\ (a<b)$ と表す．
t の関数 $|t-a|+|t-b|$ の $1\leq t\leq 3$ における最大値と最小値を求めよ．

【解答】

$u(x)=x^3-(t+3)x^2+(3t+2)x-2t$ より，

$$u'(x)=3x^2-2(t+3)x+(3t+2)=0 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(2.1) の判別式を D と表すと，

$$\mathrm{D}/4=(t+3)^2-3(3t+2)=t^2-3t+3>0 \quad (\forall t) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) により，$u'(x)=0$ は常に異なる 2 個の実数解 $a,\ b$ を持ち，

$$a+b=\frac{2(t+3)}{3}\ \wedge\ ab=\frac{3t+2}{3} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

$1\leq t\leq 3$ を考慮して，$u(x)$ のグラフは下の 2 通りが可能である．即ち，

$$\big(1\leq t\leq 2\ \wedge\ a\leq t\leq b\big)\ \vee\ \big(2\leq t\leq 3\ \wedge\ a\leq b\leq t\big) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

このとき，$v(t)=|t-a|+|t-b|$ の最大値と最小値を調べる．

● $1\leq t\leq 2$ の場合;

$$v(t)=b-a=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{\frac{4}{9}(t+3)^2-\frac{4}{3}(3t+2)}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) により，

$$\max.v=\frac{2}{3}\ \ (t=1,\ 2),\quad \min.v=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \left(t=\frac{3}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

● $2\leq t\leq 3$ の場合;

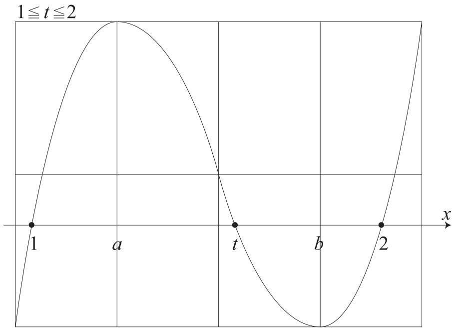
$$v(t)=2t-(a+b)=2t-\frac{2}{3}(t+3)=\frac{4t}{3}-2 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

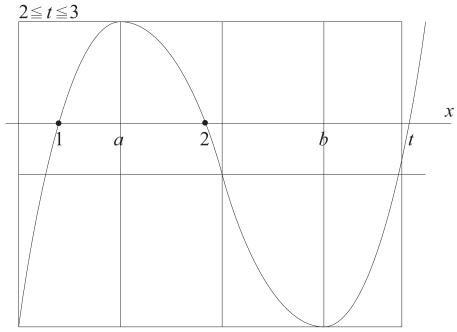
(2.7) により，

$$\max.v=2\ \ (t=3),\quad \min.v=\frac{2}{3}\ \ (t=2) \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.6), (2.8) より，

$$\textbf{最大値}:2\ \ (t=3),\quad \textbf{最小値}:\frac{1}{\sqrt{3}}\ \left(t=\frac{3}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$





【W.3.3】

3 次方程式 $x^3+3x^2-1=0$ の 1 つの解を α とする．

(1) $(2\alpha^2+5\alpha-1)^2$ を $a\alpha^2+b\alpha+c$ の形の式で表せ．ただし，a, b, c は有理数とする．

(2) 上の 3 次方程式の α 以外の 2 つの解を (1) と同様の形式で表せ．

【解答】

$u(x)=x^3+3x^2-1$ とするとき，

$$u'(x)=3x(x+2)=0 \iff x=-2,\ 0 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(3.1) により，

$$\text{極大値}: u(-2)=3>0,\quad \text{極小値}: u(0)=-1<0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

即ち，$y=u(x)$ は x 軸と異なる 3 個の交点を持ち，題意の 3 次方程式は異なる 3 個の実数解を持つ．
その 3 実数解を小さい順に α_1, α_2, α_3 と表せば，

$$u(-3)=-1<0 \ \wedge\ u(1)=3>0 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

より，

$$-3<\alpha_1<-2<\alpha_2<0<\alpha_3<1 \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

(1) α は $x^3+3x^2-1=0$ の解であるから，

$$\alpha^3=-3\alpha^2+1 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) の両辺に $\alpha\neq 0$ を乗じて，

$$\alpha^4=-3\alpha^3+\alpha=-3(-3\alpha^2+1)+\alpha=9\alpha^2+\alpha-3 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.5), (3.6) により，

$$(2\alpha^2+5\alpha-1)^2=4\alpha^4+20\alpha^3+21\alpha^2-10\alpha+1$$
$$=4(9\alpha^2+\alpha-3)+20(-3\alpha^2+1)+21\alpha^2-10\alpha+1=-3\alpha^2-6\alpha+9$$
$$\therefore\ (2\alpha^2+5\alpha-1)^2=-3\alpha^2-6\alpha+9 \qquad \cdots\cdots(3.7)$$

(2) x^3+3x^2-1 は $x-\alpha$ を因数に持つので，

$$x^3+3x^2-1=(x-\alpha)\bigl(x^2+(3+\alpha)x+\alpha(3+\alpha)\bigr) \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

(3.8) により，α 以外の 2 実数解は

$$x^2+(3+\alpha)x+\alpha(3+\alpha)=0 \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

なる方程式の解であるから，解の公式により，

$$x=\frac{1}{2}\left(-(3+\alpha)\pm\sqrt{(3+\alpha)^2-4\alpha(3+\alpha)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-(3+\alpha)\pm\sqrt{-3\alpha^2-6\alpha+9}\right)=\frac{-(3+\alpha)\pm(2\alpha^2+5\alpha-1)}{2}\quad (\because\ (3.7))$$
$$=\alpha^2+2\alpha-2,\ -\alpha^2-3\alpha-1$$

従って，α 以外の解は，

$$\alpha^2+2\alpha-2,\quad -\alpha^2-3\alpha-1 \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

[Note]　実数解の存在範囲 (3.4) により，

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3<\alpha_1<-2 & \Longleftrightarrow & -2<\alpha_1+1<-1 \\ -2<\alpha_2<0 & \Longleftrightarrow & -1<\alpha_2+1<1 \\ 0<\alpha_3<1 & \Longleftrightarrow & 1<\alpha_3+1<2 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad -3(\alpha_k+1)^2+12>0 \quad (k=1,2,3)$$

即ち，解の公式における根号内の α の 2 次式は正であり，α 以外の 2 解も実数であることが保証される．

【**W.3.4**】

$k=1,\,2,\,\cdots,\,n$ に対して，$\alpha_k\neq 0$ は互いに異なる複素数であり，次の性質を満たす.
集合 $\mathsf{A}=\{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_n\}$ に対して，

$$\alpha_j\in\mathsf{A}\ \wedge\ \alpha_k\in\mathsf{A}\implies\alpha_j\,\alpha_k\in\mathsf{A}\quad\bigl(1\leq\forall j,\,\forall k\leq n\bigr)\qquad\cdots\cdots(4.1)$$

(1) 任意の $i\,(=1,2,\cdots,n)$ に対して，

$$\{\alpha_i\,\alpha_1,\,\alpha_i\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_i\,\alpha_n\}=\mathsf{A}\qquad\cdots\cdots(4.2)$$

であることを示せ.
(2) A は 1 の n 乗根全体の集合であることを示せ.

【**解答**】

(1) 異なる番号 $j,\,k$ に対して，$\alpha_i\,\alpha_j=\alpha_i\,\alpha_k$ を仮定すると，

$$\alpha_i\bigl(\alpha_j-\alpha_k\bigr)=0\iff\alpha_i=0\ \vee\ \alpha_j=\alpha_k\ \ (j\neq k)\qquad\cdots\cdots(4.3)$$

ここで，0 は A の要素ではなく，A の要素はすべて異なるので，(4.3) はいずれも成り立たない.
即ち，$\alpha_i\,\alpha_j\neq\alpha_i\,\alpha_k\ (j\neq)$ が示され，$\alpha_i\,\alpha_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ はすべて A の異なる要素である.

$$\therefore\ \{\alpha_i\,\alpha_1,\,\alpha_i\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_i\,\alpha_n\}=\mathsf{A}\qquad\cdots\cdots(4.2)$$

(2) 任意の番号 i に対して，

$$\{\alpha_i\,\alpha_1,\,\alpha_i\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_i\,\alpha_n\}\overset{\text{put}}{=}\mathsf{A}_i\qquad\cdots\cdots(4.5)$$

このとき，A_i のすべての要素の積をとれば，

$$\begin{aligned}&(\alpha_i\,\alpha_1)\times(\alpha_i\,\alpha_2)\times\cdots\times(\alpha_i\,\alpha_n)=\alpha_1\times\alpha_2\times\cdots\times\alpha_n\\&\qquad\iff{\alpha_i}^n\times\bigl(\alpha_1\times\alpha_2\times\cdots\times\alpha_n\bigr)=\alpha_1\times\alpha_2\times\cdots\times\alpha_n\\&\qquad\qquad\iff{\alpha_i}^n=1\quad\bigl(\because\ \alpha_j\neq 0\ \ (1\leq\forall j\leq n)\bigr)\qquad\cdots\cdots(4.6)\end{aligned}$$

ここで，番号 i は任意であるから，

$${\alpha_i}^n=1\quad\bigl(1\leq\forall i\leq n\bigr)\qquad\cdots\cdots(4.7)$$

(4.7) はすべての α_i が 1 の n 乗根であることを意味し，α_i はすべて互いに異なるので，

$$\mathsf{A}=\{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_n\}$$

は 1 の n 乗根全体の集合である.