【W.4.1】

平面上で互いに外接する円 $\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{C}_3$ に対して，

$$\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2 \text{の共通接線を } \mathfrak{L}_3,\quad \mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{C}_3 \text{の共通接線を } \mathfrak{L}_1,\quad \mathfrak{C}_3,\ \mathfrak{C}_1 \text{の共通接線を } \mathfrak{L}_2$$

とするとき，$\mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{L}_2,\ \mathfrak{L}_3$ は 1 点 I で交わることを示せ．更に，

$$\mathfrak{C}_1 \text{の中心と半径を } \mathrm{O}_1,\ r_1,\quad \mathfrak{C}_2 \text{の中心と半径を } \mathrm{O}_2,\ r_2,\quad \mathfrak{C}_3 \text{の中心と半径を } \mathrm{O}_3,\ r_3$$

とするとき，I は三角形 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ の内心であることを示し，内接円の半径 r を求めよ．

【解答】

$k=1,\ 2,\ 3$ に対して，$\mathfrak{C}_k$ の方程式を正規形で

$$u_k(x,\ y)=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

と表し，共通接線 $\mathfrak{L}_k$ の方程式を

$$v_k(x,\ y)=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

と表せば，

$$\begin{cases} v_1(x,\ y)=u_2(x,\ y)-u_3(x,\ y) \\ v_2(x,\ y)=u_3(x,\ y)-u_1(x,\ y) \\ v_3(x,\ y)=u_1(x,\ y)-u_2(x,\ y) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

ここで，$\mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{L}_2$ の交点を $\mathrm{I}(x_0,\ y_0)$ と表せば，

$$\begin{cases} v_1(x_0,\ y_0)=0 \\ v_2(x_0,\ y_0)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_2(x_0,\ y_0)=u_3(x_0,\ y_0) & \cdots\cdots(1.4) \\ u_3(x_0,\ y_0)=u_1(x_0,\ y_0) & \cdots\cdots(1.5) \end{cases}$$

(1.4), (1.5) により，

$$u_1(x_0,\ y_0)=u_2(x_0,\ y_0) \iff v_3(x_0,\ y_0)=0 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

(1.6) により，$\mathfrak{L}_3$ も I (**根心**) を通り，題意前半部は示された．
次に，

$$\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2 \text{の接点を } \mathrm{T}_3,\quad \mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{C}_3 \text{の接点を } \mathrm{T}_1,\quad \mathfrak{C}_3,\ \mathfrak{C}_1 \text{の接点を } \mathrm{T}_2$$

と表せば，三角形 $\mathrm{IT}_3\mathrm{O}_1,\ \mathrm{IT}_2\mathrm{O}_1$ において，

$$\triangle \mathrm{IT}_3\mathrm{O}_1 \equiv \triangle \mathrm{IT}_2\mathrm{O}_1 \quad \because \begin{cases} \mathrm{IO}_1 : \text{共通} \\ \angle \mathrm{IT}_3\mathrm{O}_1=\angle \mathrm{IT}_2\mathrm{O}_1=90^\circ \\ \mathrm{O}_1\mathrm{T}_2=\mathrm{O}_1\mathrm{T}_3=r_1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

即ち，

$$\angle \mathrm{IO}_1\mathrm{T}_2=\angle \mathrm{IO}_1\mathrm{T}_3 \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

同様にして，

$$\angle \mathrm{IO}_2\mathrm{T}_3=\angle \mathrm{IO}_2\mathrm{T}_1 \ \wedge \ \angle \mathrm{IO}_3\mathrm{T}_1=\angle \mathrm{IO}_3\mathrm{T}_2 \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

(1.8), (1.9) により，根心 I は三角形 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ の内心である．
即ち，題意後半部が示された．

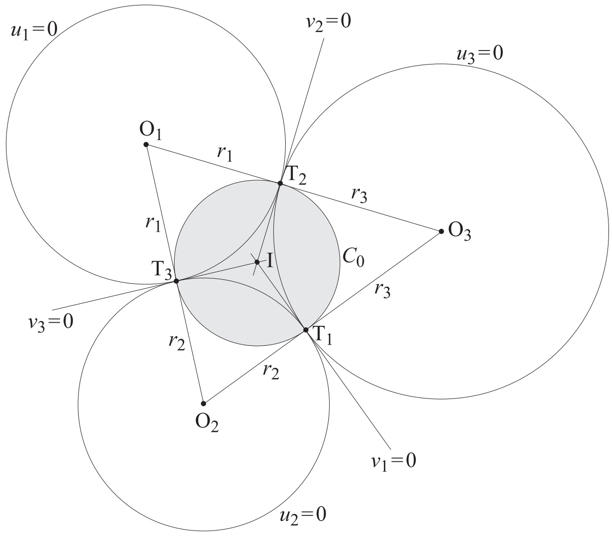
また，三角形 $O_1O_2O_3$ の三辺の長さはそれぞれ r_1+r_2, r_2+r_3, r_3+r_1 であるから，

$$s=\frac{1}{2}\left\{(r_1+r_2)+(r_2+r_3)+(r_3+r_1)\right\}=r_1+r_2+r_3 \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

と置けば，三角形の面積に関して次の方程式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}\big((r_1+r_2)+(r_2+r_3)+(r_3+r_1)\big)\,r=\sqrt{s\big(s-(r_1+r_2)\big)\big(s-(r_2+r_3)\big)\big(s-(r_3+r_1)\big)} \quad (\because \text{ Heron } \textbf{の公式})$$

$$\iff (r_1+r_2+r_3)\,r=\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)} \iff r=\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}} \qquad \cdots\cdots(1.11)$$



【**Note**】　**– 根軸と根心 –**

2 円 $\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2$ の方程式が正規形

$$\begin{cases} u_1(x,\ y)=x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0 \\ u_2(x,\ y)=x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(1.12)$$

で表されるとき，2 円の共有点の有無に拘らず，

$$v_3(x,\ y)=u_1(x,\ y)-u_2(x,\ y)=-2(a_1-a_2)x-2(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0 \quad \cdots\cdots(1.13)$$

で表される直線を $\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2$ の**根軸**という．

3 円 $\mathfrak{C}_k$ $(k=1,2,3)$ に対して，(1.13) と同様の計算で得られる 3 本の根軸

$$v_k(x,\ y)=u_i(x,\ y)-u_j(x,\ y)=0\ \wedge\ \{i,\ j,\ k\}=\{1,\ 2,\ 3\} \quad \cdots\cdots(1.14)$$

は 1 点 (**根心**) を共有するか，または平行となる．

1 点を共有する場合は「解答」で確認したので，平行となる場合を考える．

$v_3 \mathbin{/\!/} v_1$ となるとき，

$$\begin{cases} v_3(x,\ y)=u_1(x,\ y)-u_2(x,\ y)=A_3x+B_3y+C_3=0 \\ v_1(x,\ y)=u_2(x,\ y)-u_3(x,\ y)=A_1x+B_1y+C_1=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(1.15)$$

と表せば，$A_3:B_3=A_1:B_1$ が成り立つので，

$$v_2(x,\ y)=u_3(x,\ y)-u_1(x,\ y)=-(A_3+A_1)x-(B_3+B_1)y-(C_3+C_1)=0 \quad \cdots\cdots(1.16)$$

より，

$$A_3:B_3=A_1:B_1=(A_3+A_1):(B_3+B_1) \quad \cdots\cdots(1.17)$$

即ち，

$$v_3 \mathbin{/\!/} v_1 \implies v_3 \mathbin{/\!/} v_1 \mathbin{/\!/} v_2 \quad \cdots\cdots(1.18)$$

また，3 円の根軸が 1 点を共有するとき，その交点を 3 円の**根心**という．

本問のように根心 I が $\mathfrak{C}_1$ の外部にあるとき，

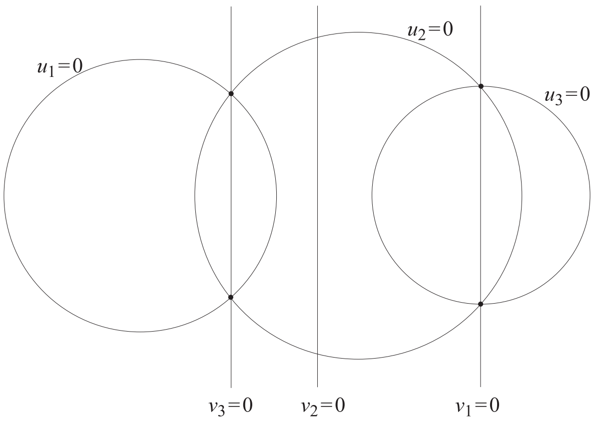
I の $\mathfrak{C}_1$ に関する**方幕**の値は正であり，I は $\mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{C}_3$ に対しても外部にある．

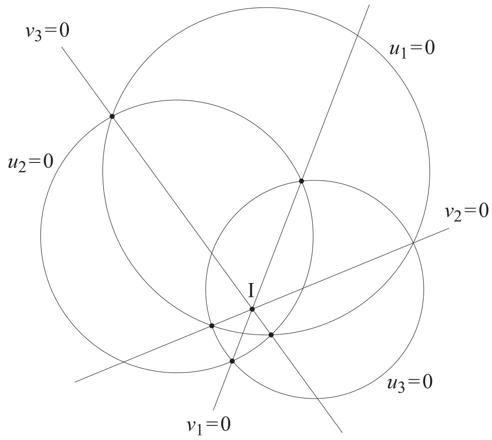
このとき，I から 3 円に引いた接線の接点をそれぞれ $\mathrm{T}_1,\ \mathrm{T}_2,\ \mathrm{T}_3$ とすれば，方幕の値に関して，

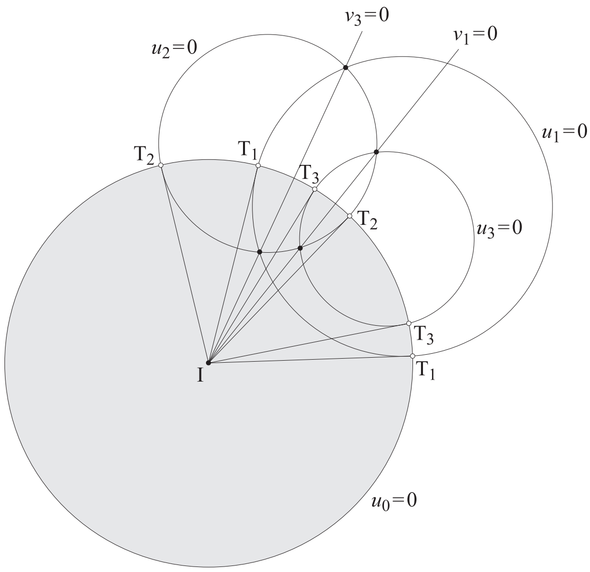
$$\mathrm{IT_1}^2=\mathrm{IT_2}^2=\mathrm{IT_3}^2 \iff \mathrm{IT_1}=\mathrm{IT_2}=\mathrm{IT_3} \quad \cdots\cdots(1.19)$$

即ち，I を中心として $(1.19)=(1.11)$ の値を半径とする円 $\mathfrak{C}_0$ を描けば，

$\mathfrak{C}_0$ は $\mathrm{T}_1,\ \mathrm{T}_2,\ \mathrm{T}_3$ を同時に通り，$\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{C}_3$ のすべてに直交する．


$u_1=0$
$u_2=0$
$u_3=0$
$v_3=0$
$v_2=0$
$v_1=0$


$v_3=0$
$u_1=0$
$u_2=0$
$v_2=0$
I
$u_3=0$
$v_1=0$


$v_3=0$
$v_1=0$
$u_2=0$
$u_1=0$
T_2
T_1
T_3
T_2
$u_3=0$
T_3
T_1
I
$u_0=0$

【W.4.2】

xyz 空間内の点 P(0, 0, 1) を中心とする半径 1 の球面 $\mathfrak{K}$ 上の点 Q(a, b, c) が条件

$$a>0,\ \ b>0,\ \ c>1 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

の下に $\mathfrak{K}$ 上を動くとき，Q において $\mathfrak{K}$ に接する平面 $\mathfrak{L}$ が x, y, z 座標軸と交わる点を A, B, C とする．このとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ．

【解答】

平面 $\mathfrak{L}$ の法線ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ としてよいので，$\mathfrak{L}$ の方程式は，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}=0 \iff ax+by+(c-1)z=c \quad \left(\because\ a^2+b^2+(c-1)^2=1\right)$$

$$\iff \frac{x}{c/a}+\frac{y}{c/b}+\frac{z}{\dfrac{c}{c-1}}=1 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

(2.2) により，

$$\mathrm{A}\big(c/a,\ 0,\ 0\big),\ \ \mathrm{B}\big(0,\ c/b,\ 0\big),\ \ \mathrm{C}\left(0,\ 0,\ \frac{c}{c-1}\right) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

ここで，

$$\big(\triangle\mathrm{ABC}\big)^2=\big(\triangle\mathrm{OAB}\big)^2+\big(\triangle\mathrm{OBC}\big)^2+\big(\triangle\mathrm{OCA}\big)^2 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

により，

$$\big(\triangle\mathrm{ABC}\big)^2=\frac{c^4}{4a^2b^2}+\frac{c^4}{4b^2(c-1)^2}+\frac{c^4}{4a^2(c-1)^2}=\frac{c^4}{4a^2b^2(c-1)^2} \quad \left(\because\ a^2+b^2+(c-1)^2=1\right)$$

$$\iff \triangle\mathrm{ABC}=\frac{c^2}{2ab(c-1)} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

更に，**相加相乗平均の不等式**により，

$$2ab=2\sqrt{a^2b^2}\leq a^2+b^2=1-(c-1)^2 \quad \left(\text{等号条件}: a=b=\sqrt{\frac{1-(c-1)^2}{2}}\right) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

(2.5), (2.6) により，

$$\triangle\mathrm{ABC}\geq\frac{c^2}{(c-1)\big(1-(c-1)^2\big)}=\frac{c}{-c^2+3c-2}=\frac{1}{3-\left(c+\dfrac{2}{c}\right)}\geq\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.7) の等号条件は，(2.6) の等号条件と $c=\sqrt{2}$ が同時に成立すること．即ち，

$$a=b=\sqrt{\sqrt{2}-1}\ \wedge\ c=\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.7), (2.8) により，求める最小値は，$3+2\sqrt{2}$

【W.4.3】

関数 $u(x)$, $v(x)$ を

$$u(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}, \quad v(x) = x^5 + x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x + \frac{1}{120}$$

によって定めるとき，以下の事柄が成り立つことを示せ.

(1) 任意の実数 x に対して，$u(x) > 0$ である.

(2) 方程式 $v(x) = 0$ は唯一の実数解 α を持ち，$-1 < \alpha < 0$ を満たす.

【解答】

(1) $u(x)$ は 4 次の係数が正なので，適当な実数 x_1 に対して，

$$u(x) \geq u(x_1) \quad (\forall x) \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を満たす x_1 が存在し，$x = x_1$ は $u(x)$ の極小値を与えるので，

$$u'(x_1) = 0 \iff 4{x_1}^3 + 3{x_1}^2 + x_1 + \frac{1}{6} = 0 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

このとき，$u(x)$ の最小値 $u(x_1)$ に対して，

$$\begin{aligned} u(x_1) &= {x_1}^4 + {x_1}^3 + \frac{1}{2}{x_1}^2 + \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{24} \\ &= \left(4{x_1}^3 + 3{x_1}^2 + x_1 + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16}{x_1}^2 + \frac{1}{16}x_1 + \frac{1}{32} \\ &= \frac{1}{16}\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{64} > 0 \qquad \cdots\cdots(3.3) \end{aligned}$$

(3.1), (3.3) より，

$$u(x) \geq u(x_1) > 0 \quad (\forall x) \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

[Note] $u(x)$ を**完全平方式**の形に書き換えて，

$$u(x) = x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{72} > 0 \quad (-\infty < x < \infty) \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

としても示せる.

(2) $v(x)$ の導関数を求めて,

$$v'(x) = 5x^4 + 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24} \quad \cdots\cdots(3.6)$$

$v'(x)$ は 4 次の係数が正なので, 適当な実数 x_2 に対して,

$$v'(x) \geq v'(x_2) \quad (\forall x) \quad \cdots\cdots(3.7)$$

を満たす x_2 が存在し, $x = x_2$ は $v'(x)$ の極小値を与えるので,

$$v''(x_2) = 0 \iff 20{x_2}^3 + 12{x_2}^2 + 3x_2 + \frac{1}{3} = 0 \quad \cdots\cdots(3.8)$$

このとき, $v'(x)$ の最小値 $v'(x_2)$ に対して,

$$\begin{aligned} v'(x_2) &= 5{x_2}^4 + 4{x_2}^3 + \frac{3}{2}{x_2}^2 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{24} \\ &= \left(20{x_2}^3 + 12{x_2}^2 + 3x_2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{20}\right) + \frac{3}{20}{x_2}^2 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{40} \\ &= \frac{3}{20}\left(x_2 + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{120} > 0 \quad \cdots\cdots(3.9) \end{aligned}$$

(3.7), (3.9) により,

$$v'(x) \geq v'(x_2) > 0 \quad (\forall x) \quad \cdots\cdots(3.10)$$

(3.10) により, $v(x)$ は**単調増加**であり, 更に,

$$v(0) = \frac{1}{120} > 0 \ \land \ v(-1) = -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = -\frac{11}{30} < 0 \quad \cdots\cdots(3.11)$$

即ち, $v(x) = 0$ は $-1 < x < 0$ の範囲に唯一の実数解 α を持つ.

[Note] $v'(x)$ を**完全平方式**の形に書き換えて,

$$v'(x) = 5x^2\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{7}{10}\left(x + \frac{5}{21}\right)^2 + \frac{1}{504} > 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad \cdots\cdots(3.12)$$

としても示せる.

【W.4.4】

次の有理数の整数部分の桁数と 1 の位の数字を求めよ.

$$\frac{10^{210}}{10^{10}+3} \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

ただし，$3^{21}=10460353203$ を用いてよい.

【解答】

$10^{10}<10^{10}+3<10^{11}$ より，

$$\frac{10^{210}}{10^{10}}>\frac{10^{210}}{10^{10}+3}>\frac{10^{210}}{10^{11}} \iff 10^{199}<\frac{10^{210}}{10^{10}+3}<10^{200} \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

即ち，(4.1) の桁数は 200 桁である.

また，

$$\frac{(10^{10})^{21}+3^{21}}{10^{10}+3}=(10^{10})^{20}-3\times(10^{10})^{19}+3^2\times(10^{10})^{18}-\cdots\cdots-3^{19}\times10^{10}+3^{20} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

(4.3) を変形して，

$$\frac{10^{210}}{10^{10}+3}=10\bigl(10^{199}-3\cdot10^{189}+3^2\cdot10^{179}-\cdots\cdots-3^{19}\cdot10^{9}\bigr)+3^{20}-\frac{3^{21}}{10^{10}+3} \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

即ち，$3^{20}-\dfrac{3^{21}}{10^{10}+3}$ の一位の数を調べればよい.

ここで，$3^{21}=10460353203$ (11 桁) であるから，

$$10^{10}+3<3^{21}<2(10^{10}+3) \iff 1<\frac{3^{21}}{10^{10}+3}<2 \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

更に，

$$3^{20}=\frac{10460353203}{3}=3486784401 \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(4.5), (4.6) により，求める一位の数は 9 である.