【W.5.1】

正整数 N の正の約数 n に対して,

$$u(n) = n + \frac{N}{n} \quad (n : N \text{ の正の約数})$$

と定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $N = 2^k$ (k : 正整数) のとき, $u(n)$ の最小値を求めよ.

(2) $N = 7!$ のとき, $u(n)$ の最小値を求めよ.

【解答】

相加相乗平均の不等式により, 任意の正の実数 x に対して,

$$u(x) = x + \frac{N}{x} \geq 2\sqrt{N} \quad \left(\text{等号条件} : x = \sqrt{N}\right) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

このとき, $u(x)$ のグラフを考慮して, $x = \sqrt{N}$ 近辺の約数 n に対して, $u(n)$ の値を調べる.

(1) $\sqrt{N} = 2^{\frac{k}{2}}$ より, k の偶奇で分類する.

● $k = 2m$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合;

$$\min . u = u(2^m) = 2^m + \frac{2^{2m}}{2^m} = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1} = 2^{\frac{k+2}{2}} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

● $k = 2m+1$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合;

$$\min . u = \min\bigl(u(2^m),\ u(2^{m+1})\bigr) = 2^m + 2^{m+1} = 3 \cdot 2^m = 3 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.2), (1.3) により,

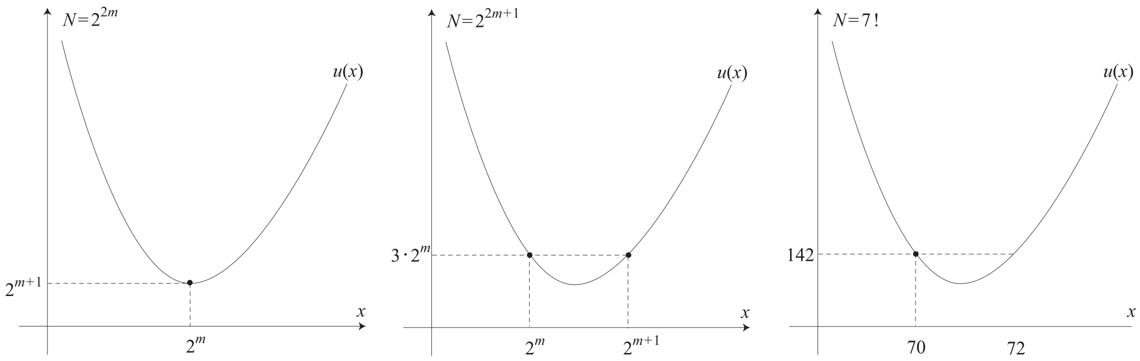
$$\min . u = \begin{cases} 2^{\frac{k+2}{2}} & \left(n = 2^{\frac{k}{2}}\right) \quad (k : \text{even}) \\ 3 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} & \left(n = 2^{\frac{k\pm1}{2}}\right) \quad (k : \text{odd}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(2) $\sqrt{N} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = 12\sqrt{35}$ より,

$$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 < \sqrt{N} < 72 = 2^3 \cdot 3^2 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

を考慮して,

$$\min . u = \min\bigl(u(70),\ u(72)\bigr) = 2 \cdot 5 \cdot 7 + 2^3 \cdot 3^2 = 142 \iff \min . u = 142 \ \ (n = 70,\ 72) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$



【W.5.2】

座標空間内の 4 点

$$\mathrm{P}(0,\,0,\,0),\ \mathrm{Q}(a,\,0,\,0),\ \mathrm{R}(0,\,1,\,0),\ \mathrm{S}(0,\,1,\,b)\quad (a>0,\,b>0) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

が半径 1 の同一球面上にあるとき,

P, Q, R, S を頂点とする四面体に内接する球の半径を $r>0$ とすれば,

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{20}{3},\quad \frac{1}{r} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

なる不等式が同時に成り立つことを示せ.

【解答】

(2.1) の定める半径 1 の球面の中心を $\mathrm{O}'(s,\,t,\,u)$ と表すと,

$$\begin{cases} s^2+t^2+u^2=1 \\ (s-a)^2+t^2+u^2=1 \\ s^2+(t-1)^2+u^2=1 \\ s^2+(t-1)^2+(u-b)^2=1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2.3) により,

$$\mathrm{O}'(s,\,t,\,u)=\mathrm{O}'\left(\frac{1}{2}a,\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}b\right) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

ここで, $\mathrm{O}'\mathrm{P}=1$ により,

$$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}b^2=1 \iff a^2+b^2=3 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

一方, 四面体 PQRS の体積に関して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{PQR}\times b &= \frac{1}{3}\big(\triangle\mathrm{PQR}+\triangle\mathrm{PRS}+\triangle\mathrm{QRS}+\triangle\mathrm{PQS}\big)r \\ \iff ab &= r\left(a+b+b\sqrt{a^2+1}+a\sqrt{b^2+1}\right) \\ \iff \frac{1}{r} &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}} \qquad \cdots\cdots(2.6) \end{aligned}$$

(2.6) により,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 &= 1+\frac{1}{a^2}+1+\frac{1}{b^2}+2\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\sqrt{1+\frac{1}{b^2}} \\ &= 2+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+2\sqrt{1+\frac{a^2+b^2+1}{a^2b^2}} \\ &= 2+\frac{3}{a^2b^2}+2\sqrt{1+\frac{4}{a^2b^2}} \quad (\because\ (2.5)) \qquad \cdots\cdots(2.7) \end{aligned}$$

相加相乗平均の不等式により,

$$\frac{3}{2}=\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}=ab \quad (\because\ a>0,\,b>0) \iff \frac{1}{ab} \geq \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.7), (2.8) により,

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=2+\frac{3}{a^2b^2}+2\sqrt{1+\frac{4}{a^2b^2}}\geq 2+3\times\frac{4}{9}+2\sqrt{1+4\times\frac{4}{9}}=\frac{20}{3}$$

$$\iff \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{20}{3} \quad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.8), (2.9) の等号条件は一致するので,

$$a^2=b^2 \wedge a^2+b^2=3 \iff a=b=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots(2.10)$$

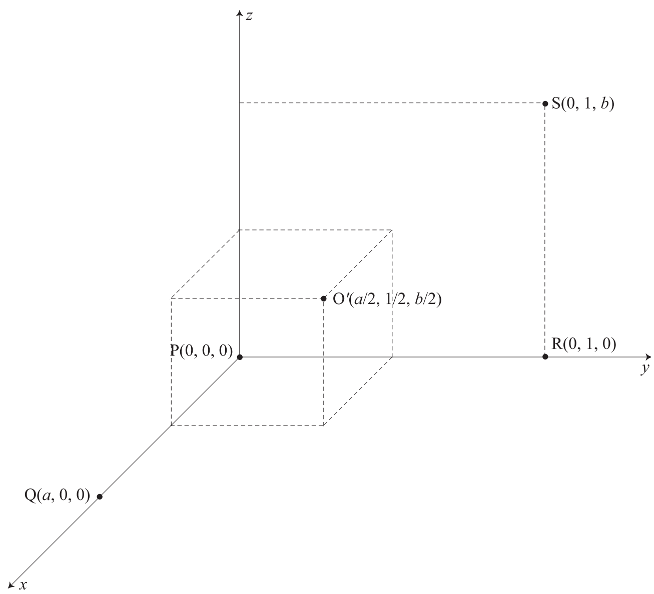
(2.9), (2.10) により, (2.2) の第一不等式が示された.
次に, (2.6), (2.8), (2.9) により,

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geq\sqrt{\frac{20}{3}} \;\wedge\; \frac{1}{ab}\geq\frac{2}{3}$$

$$\iff \frac{1}{r}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{20}{3}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}+\sqrt{\frac{20}{3}}\geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\iff \frac{1}{r}\geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}} \quad \cdots\cdots(2.11)$$

(2.11) の等号条件は (2.10) であり, (2.2) の第二不等式が示された.



【W.5.3】

円に内接する四角形 ABCD に対して,

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DB}$$

が成り立つことを示せ. (Ptolemy **の定理**)

【解答】 – 余弦定理 –

$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{BC}=b,\ \mathrm{CD}=c,\ \mathrm{DA}=d,\ \mathrm{BD}=x,\ \mathrm{CA}=y$ と表す.

三角形 ABC に余弦定理を用いて,

$$y^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle B \iff \cos\angle B=\frac{a^2+b^2-y^2}{2ab} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

三角形 CDA に余弦定理を用いて,

$$y^2=c^2+d^2-2cd\cos\angle D \iff \cos\angle D=\frac{c^2+d^2-y^2}{2cd} \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

$\cos\angle B+\cos\angle D=0$ であるから,

$$\frac{a^2+b^2-y^2}{2ab}+\frac{c^2+d^2-y^2}{2cd}=0 \iff cd\left(a^2+b^2-y^2\right)+ab\left(c^2+d^2-y^2\right)=0$$

$$\iff (ab+cd)y^2=(ad+bc)(ac+bd) \iff y^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

三角形 BCD に余弦定理を用いて,

$$x^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle C \iff \cos\angle C=\frac{b^2+c^2-x^2}{2bc} \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

三角形 DAB に余弦定理を用いて,

$$x^2=d^2+a^2-2da\cos\angle A \iff \cos\angle A=\frac{d^2+a^2-x^2}{2da} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

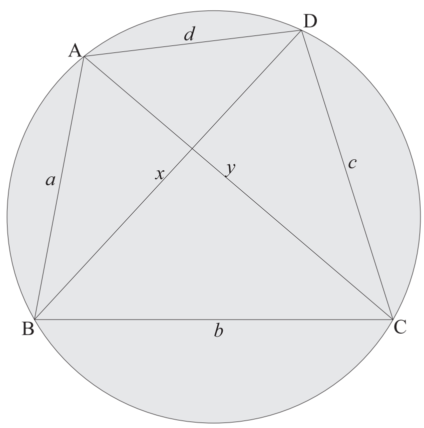
$\cos\angle C+\cos\angle A=0$ であるから,

$$\frac{b^2+c^2-x^2}{2bc}+\frac{d^2+a^2-x^2}{2da}=0 \iff da\left(b^2+c^2-x^2\right)+bc\left(d^2+a^2-x^2\right)=0$$

$$\iff (ad+bc)x^2=(ac+bd)(ab+cd) \iff x^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

(3.3), (3.6) の両辺を乗じて,

$$x^2y^2=(ac+bd)^2 \iff xy=ac+bd \iff \mathrm{BD}\cdot\mathrm{CA}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA} \qquad \cdots\cdots(3.7)$$



【別解】 – 反転 –

四角形 ABCD とその外接円 G を適当に拡大または縮小することで,
円 $x^2+y^2=1$ の内部に移動することができる．ここで，$\mathrm{D}=\mathrm{O}$ とする．
更に，単位円 $x^2+y^2=1$ を反転円とする反転

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2} \ \wedge \ y'=\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \cdots\cdots(3.8)$$

により，G が移る直線を G′ とすると，G 上の点 A, B, C は，G′ 上の点 A′, B′, C′ に移る．
このとき，
三角形 DAB と三角形 DB′A′ は二辺比挟角相等で相似となり，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{B'A'}=\mathrm{DA}:\mathrm{DB'} \iff a:\mathrm{B'A'}=d:\frac{1}{x} \iff \mathrm{B'A'}=\frac{a}{dx} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

三角形 DBC と三角形 DC′B′ は二辺比挟角相等で相似となり，

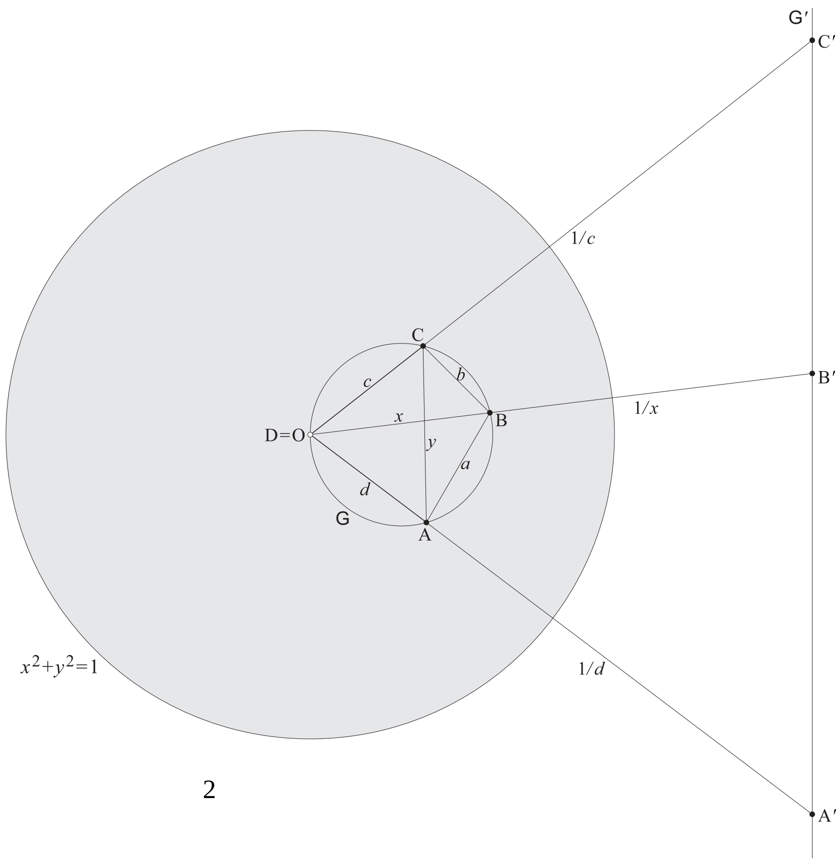
$$\mathrm{BC}:\mathrm{C'B'}=\mathrm{DC}:\mathrm{DB'} \iff b:\mathrm{C'B'}=c:\frac{1}{x} \iff \mathrm{C'B'}=\frac{b}{cx} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

三角形 DAC と三角形 DC′A′ は二辺比挟角相等で相似となり，

$$\mathrm{CA}:\mathrm{A'C'}=\mathrm{DA}:\mathrm{DC'} \iff y:\mathrm{A'C'}=d:\frac{1}{c} \iff \mathrm{AC'}=\frac{y}{cd} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

(3.9), (3.10), (3.11) により，

$$\mathrm{A'C'}=\mathrm{C'B'}+\mathrm{B'A'} \iff \frac{y}{cd}=\frac{b}{cx}+\frac{a}{dx}$$
$$\iff xy=ac+bd \iff \mathrm{BD}\cdot\mathrm{CA}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA} \qquad \cdots\cdots(3.12)$$



【W.5.4】
多項式の列

$$\mathrm{P}_0(x)=0,\ \mathrm{P}_1(x)=1,\ \mathrm{P}_2(x)=1+x,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k,\ \cdots \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

を考える．
(1) 正整数 n, m に対して，$\mathrm{P}_n(x)$ を $\mathrm{P}_m(x)$ で割った余りは，

$$\mathrm{P}_0(x),\ \mathrm{P}_1(x),\ \cdots,\mathrm{P}_{m-1}(x) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

のいずれかであることを示せ．
(2) 等式

$$\mathrm{P}_l(x)\times\mathrm{P}_m(x^2)\times\mathrm{P}_n(x^4)=\mathrm{P}_{100}(x) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

が成り立つような正整数の組 $(l,\ m,\ n)$ をすべて求めよ．

【解答】
(1) n に関する帰納法で証明する．
$n=1$ のとき，$\mathrm{P}_1(x)$ を $\mathrm{P}_1(x)$ で割った余りは $\mathrm{P}_0(x)$ であり，
$m\geq 2$ のとき，$\mathrm{P}_1(x)$ を $\mathrm{P}_m(x)$ で割った余りは $\mathrm{P}_1(x)$ 自身であるから題意成立．
次に，ある正整数 n に対して題意の成立を仮定する．即ち，
$\mathrm{Q}(x)$ をある多項式，$k<m\wedge k\leq n$ を満たす正整数を k として，

$$\mathrm{P}_n(x)=\mathrm{P}_m(x)\times\mathrm{Q}(x)+\mathrm{P}_k(x)\quad \bigl(k<m\wedge k\leq n\bigr) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

と表示されると仮定する．
このとき，(4.1) により，

$$\mathrm{P}_{n+1}(x)=x\mathrm{P}_n(x)+1\quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

なる漸化式が成り立つので，(4.4), (4.5) により，

$$\mathrm{P}_{n+1}(x)=x\bigl(\mathrm{P}_m(x)\times\mathrm{Q}(x)+\mathrm{P}_k(x)\bigr)+1=\mathrm{P}_m(x)\times x\mathrm{Q}(x)+\mathrm{P}_{k+1}(x) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

即ち，$\mathrm{P}_{n+1}(x)$ を $\mathrm{P}_m(x)$ で割った余りは，$\mathrm{P}_{k+1}(x)$ を $\mathrm{P}_m(x)$ で割った余りに等しい．
$\bullet$ $k+1\leq n$ のとき，帰納法の仮定により題意成立．
$\bullet$ $k+1>n$ のとき，条件 $k\leq n$ を考慮して，$k=n$.
このとき，条件 $k<m$ を考慮して，$k+1\leq m$.
$\star$ $k+1=m$ のとき，$\mathrm{P}_{k+1}(x)$ は $\mathrm{P}_m(x)$ と一致し，割り切れる．即ち，余りは $\mathrm{P}_0(x)$ であり題意成立．
$\star$ $k+1<m$ のとき，$\mathrm{P}_{k+1}(x)$ を $\mathrm{P}_m(x)$ で割った商は 0 であり，余りは $\mathrm{P}_{k+1}(x)$ 自身なので題意成立．
以上より，$\mathrm{P}_{n+1}(x)$ を $\mathrm{P}_m(x)$ で割った余りも (4.2) のいずれかで表されるので，帰納法は完結する．

(2) $x \neq \pm 1$ のとき，(4.3) を書き換えて，

$$\frac{1-x^l}{1-x} \times \frac{1-(x^2)^m}{1-x^2} \times \frac{1-(x^4)^n}{1-x^4} = \frac{1-x^{100}}{1-x} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

(4.7) の分母を払って，

$$(1-x^l)(1-x^{2m})(1-x^{4n}) = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^{100}) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(4.8) の左辺を展開して，

$$-x^{4n+2m+l} + x^{4n+2m} + x^{2m+l} + x^{4n+l} - x^{4n} - x^{2m} - x^l + 1 \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

(4.8) の右辺を展開して，

$$-x^{106} + x^{104} + x^{102} + x^6 - x^{100} - x^4 - x^2 + 1 \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.9), (4.10) の各項の次数を比較して，

$$\begin{cases} 4n+2m+l = 106 & \cdots\cdots(4.11) \\ \{4n+2m,\ 4n+l,\ 2m+l\} = \{104,\ 102,\ 6\} & \cdots\cdots(4.12) \\ \{4n,\ 2m,\ l\} = \{100,\ 4,\ 2\} & \cdots\cdots(4.13) \end{cases}$$

(4.13) により，

$$n = 25 \ \lor \ n = 1 \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

● $n = 25$ のとき，(4.11), (4.12) により，

$$\begin{cases} 2m+l = 6 & \cdots\cdots(4.15) \\ \{2m,\ l\} = \{4,\ 2\} & \cdots\cdots(4.16) \end{cases}$$

(4.15), (4.16) により，

$$(l,\ m) = (4,\ 1) \ \lor \ (l,\ m) = (2,\ 2) \qquad \cdots\cdots(4.17)$$

(4.17) は (4.13) を満たすので十分.

● $n = 1$ のとき，(4.11), (4.12) により，

$$\begin{cases} 2m+l = 102 & \cdots\cdots(4.18) \\ \{2m+4,\ l+4\} = \{104,\ 6\} & \cdots\cdots(4.19) \end{cases}$$

(4.18), (4.19) により，

$$(l,\ m) = (2,\ 50) \ \lor \ (l,\ m) = (100,\ 1) \qquad \cdots\cdots(4.20)$$

(4.20) は (4.13) を満たすので十分.

以上により，

$$(l,\ m,\ n) = (4,\ 1,\ 25),\ (2,\ 2,\ 25),\ (2,\ 50,\ 1),\ (100,\ 1,\ 1) \qquad \cdots\cdots(4.21)$$

(4.21) のとき，(4.3) は $x \neq \pm 1$ なるすべての実数 x に対して成り立ち，

(4.3) の次数は高々 106 なので，$x = \pm 1$ を含めたすべての実数 x に対して成り立つ.

即ち，求める $(l,\ m,\ n)$ は (4.21) である.