【1.1】

媒介変数表示された曲線

$$\mathfrak{C} : x = t^3 - 3t,\ \ y = t^4 - 2t^2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

の軌跡を図示せよ．また，$\mathfrak{C}$の囲む閉領域の面積を求めよ．

【解答】

$$x(-t) = -x(t) \ \wedge\ y(-t) = y(t) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

が成り立つので $\mathfrak{C}$ は y 軸に関して線対称である．

そこで，$t \geq 0$ における軌跡を調べればよい．

$$\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} = 3(t^2-1) \ \wedge\ \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}t} = 4t(t^2-1) \qquad \therefore\ \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{4t}{3} \quad (t \neq \pm 1) \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

であり，更に，

$$\frac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}x^2} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\left(\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\right) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\left(\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\right) \times \frac{\mathbf{d}t}{\mathbf{d}x} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\left(\frac{4t}{3}\right) \times \frac{\mathbf{d}t}{\mathbf{d}x} = \frac{4}{9(t^2-1)} \quad (t \neq \pm 1) \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.2), (1.3) を基に $t \geq 0$ の範囲で増減表を作る．

t	0		1		∞
$(x',\ y')$		$(-,\ -)$	$(0,\ 0)$	$(+,\ +)$	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	↙	$(-2,\ -1)$	↗	$(+\infty,\ +\infty)$
$\dfrac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}x^2}$		$-$ (上に凸)		$+$ (下に凸)	

更に，点 $(-2,\ -1)$ 付近の曲線の振る舞いについて，

$$\lim_{t \to \pm 0} \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \lim_{t \to 1 \pm 0} \frac{4t}{3} = \frac{4}{3} \pm 0 \quad (\textbf{複号同順}) \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

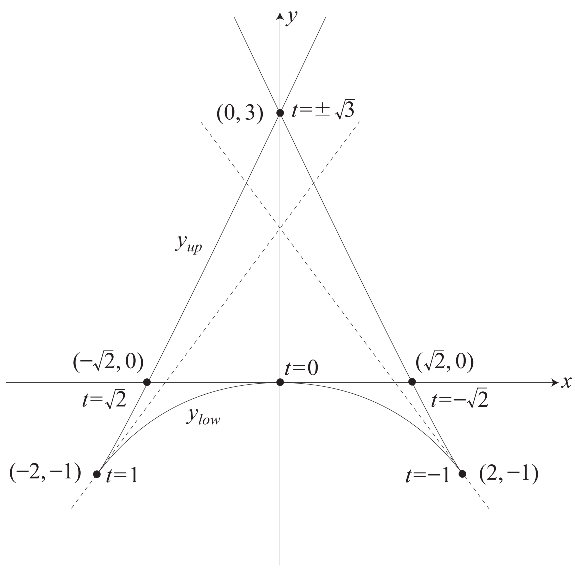
より，$\mathfrak{C}$は上下から直線 $y = \dfrac{4}{3}(x+2) - 1$ に接する．

また，$\mathfrak{C}$ の $0 \leq t \leq 1$ に対応する部分を y_{low}，

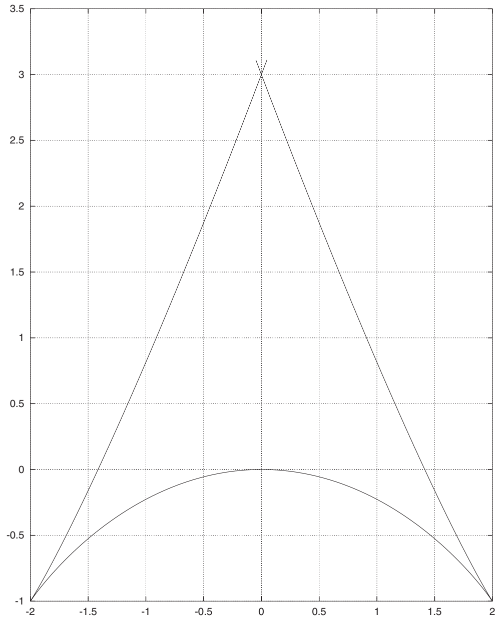
$1 \leq t \leq \sqrt{3}$ に対応する部分を y_{up} で表せば，

題意の面積 S について，

$$\begin{aligned}
S/2 &= \int_{x=-2}^{x=0} \left(y_{up} - y_{low}\right)\,\mathbf{d}x \\
&= \int_{t=1}^{t=\sqrt{3}} y_{up}(t) \frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t - \int_{t=1}^{t=0} y_{low}(t) \frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t}\,\mathbf{d}t \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} (t^4 - 2t^2) \cdot 3(t^2-1)\,\mathbf{d}t + \int_0^1 (t^4 - 2t^2) \cdot 3(t^2-1)\,\mathbf{d}t \\
&= 3 \times \int_0^{\sqrt{3}} t^2(t^2-2)(t^2-1)\,\mathbf{d}t \\
&= 3 \times \left[\frac{1}{7}t^7 - \frac{3}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{35}
\end{aligned}$$



$$\therefore\quad S = \frac{96\sqrt{3}}{35} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

【1.2】

関数 $u(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$ について，次の各問いに答えよ.

(1) 関数 $u(x)$ の極値を求めよ.

(2) 不等式 $\log x<\sqrt{x}\ (x>0)$ を示せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}u(x)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}u(x)$ を求めよ.

(5) $y=u(x)$ のグラフの概形を描け.

(6) 不定方程式 $m^n=n^m\ (0<m<n)$ を満たす整数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ.

【解答】

(1) **対数微分法**による.

$x>0$ において与式両辺の対数をとり，

$$\log u(x)=\frac{1}{x}\log x \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

(2.1) 両辺を x で微分して，

$$\frac{1}{u(x)}\frac{\mathbf{d}u(x)}{\mathbf{d}x}=\frac{1-\log x}{x^2} \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

導関数 $u'(x)$ について解き，

$$u'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\log x}{x^2} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

従って，$u(x)$ は $x=\mathbf{e}$ において極大値 $\mathbf{e}^{\frac{1}{\mathbf{e}}}$ をとる.

(2) $\sqrt{x}-\log x\overset{\text{put}}{=}v(x)$

$$v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

従って，$v(x)$ は $x=4$ において極小かつ最小.

$$\therefore\ \ v(x)\geq v(4)=2-\log 4=\log\frac{\mathbf{e}^2}{4}>\log 1=0 \qquad \therefore\ \ \log x<\sqrt{x}\quad (x>0) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(3) 十分大なる x に対して，$\dfrac{\log x}{x}>0$ であるから，

$$(0<)\ \log\Bigl(\lim_{x\to\infty}u(x)\Bigr)=\lim_{x\to\infty}\bigl(\log u(x)\bigr)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}<\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0 \quad \bigl(\because\ \ \log x<\sqrt{x}\bigr) \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

従って，**ハサミウチの原理**により，

$$\log\Bigl(\lim_{x\to\infty}u(x)\Bigr)=0\ \iff\ \lim_{x\to\infty}u(x)=1 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(4) (3) と同様に題意の極限の対数をとり，

$$\log\Bigl(\lim_{x\to+0}u(x)\Bigr)=\lim_{x\to+0}\bigl(\log u(x)\bigr)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty \qquad \therefore\ \ \lim_{xto+0}u(x)=0 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

(5) (1) により極大値は,

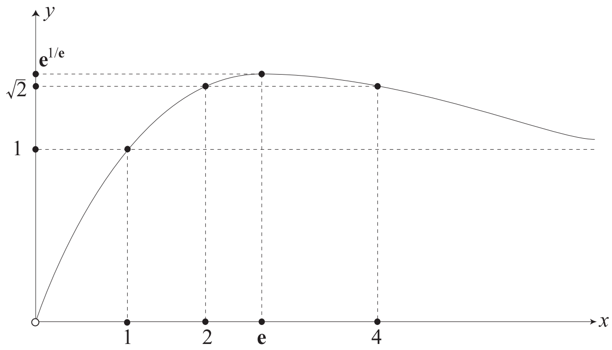
$$\mathbf{e}^{\frac{1}{\mathbf{e}}}\ (x = \mathbf{e}) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(3) により漸近線は,

$$y = 1 \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

(4) により原点付近で,

$$\lim_{x \to +0} u(x) = 0 \qquad \cdots\cdots(2.11)$$



以上より，曲線 $y = u(x)$ のグラフは**右図**の通り.

(6) (5) のグラフにより，方程式 $m^{\frac{1}{m}} = n^{\frac{1}{n}}\ (0 < m < n)$ の正整数解は,

$$(m,\ n) = (2,\ 4) \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

【1.3】

関数 $u(x)=e^{-(1+x)}\ (x>0)$ について，次の各問いに答えよ.

(1) $0<x_1<x_2$ を満たす実数 $x_1,\, x_2$ に対して，

$$\left|u(x_2)-u(x_1)\right|<\mathrm{M}\left|x_2-x_1\right|$$

を満たす実数 M $(0<\mathrm{M}<1)$ を 1 つ求めよ.

(2) 方程式 $u(x)=x$ の実数解は唯一存在することを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する.

$$a_1>0,\ \ a_{n+1}=u(a_n)\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

このとき，数列 $\{a_n\}$ は (2) の方程式の解に収束することを示せ.

【解答】

(1) $u(x)$ は $(-\infty,\,\infty)$ において連続かつ微分可能であるから，**平均値の定理**により，

$$\left|\frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}\right|=\left|u'(\xi)\right|\ \wedge\ 0<x_1<\xi<x_2 \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を満たす ξ が存在する.

ここで，$u'(x)=-\mathbf{e}^{-(1+x)}$ より，

$$\left|u'(x)\right|=\mathbf{e}^{-(1+x)}<\mathbf{e}^{-1}=\frac{1}{\mathbf{e}}\quad \left(\because\ x>0\right) \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

そこで，例えば $\mathrm{M}=\mathbf{e}^{-1}$ を選べば，

$$\left|\frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}\right|=\left|u'(\xi)\right|<\frac{1}{\mathbf{e}}=\mathrm{M}\iff \left|u(x_2)-u(x_1)\right|<\mathrm{M}\left|x_2-x_1\right| \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

従って，題意を満たす M の 1 つとして，$\mathrm{M}=\mathbf{e}^{-1}$

(2) $u(x)-x\overset{\text{put}}{=}v(x)$

$v'(x)=-\mathbf{e}^{-(1+x)}-1<0\ (\forall x)$ であるから，$v(x)$ は単調減少であり，

$$v(0)=\mathbf{e}^{-1}=\frac{1}{\mathbf{e}}>0\ \wedge\ \lim_{x\to+\infty}v(x)=-\infty \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

より，$v(x)$ のグラフは $x>0$ において 1 回だけ x 軸と交わる.

従って，方程式 $v(x)=0$ は唯一の実数解を持つ.

(3) (2) の解を α で表す．即ち，$u(\alpha)=\alpha$.

このとき，(1) の結果より，

$$\left|\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_n-\alpha}\right|=\left|\frac{u(a_n)-u(\alpha)}{a_n-\alpha}\right|<\mathrm{M}\iff \left|a_{n+1}-\alpha\right|<\mathrm{M}\left|a_n-\alpha\right| \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

不等式 (3.5) を繰り返し用いて，

$$0\le\left|a_n-\alpha\right|<\mathrm{M}^{n-1}\left|a_1-\alpha\right|\xrightarrow{n\to+\infty}0\qquad \therefore\ \lim_{n\to+\infty}a_n=\alpha \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

【1.4】

a を定数とする.

$$a^x \geq ax \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

なる不等式がすべての $x>0$ に対して成り立つとき, a に関する条件を求めよ.

【解答】

与不等式両辺の対数 (底は $a>0$) をとり,

$$\begin{cases} x \geq 1+\log_a x & (a>1) & \cdots\cdots(4.1) \\ x \leq 1+\log_a x & (0<a<1) & \cdots\cdots(4.2) \end{cases}$$

ここで,

$$u(x) = x-\log_a x-1 \quad (x>0,\ \ a>0,\ a\neq 1) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

と置けば,

$$u'(x) = 1-\frac{1}{\log a\cdot x} = \frac{1}{\log a\cdot x}(\log a\cdot x-1) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

• $0<a<1 \iff \log a<0$ の場合;

$$u'(x) = 1-\frac{1}{\log a\cdot x}>0 \ \wedge\ \lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty}\{x-\log_a x-1\} = \infty \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

であるから, 十分大なる x に対して $u(x)\leq 0$ とはできない.

• $1<a \iff \log a>0$ の場合;

$$u'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\log a} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

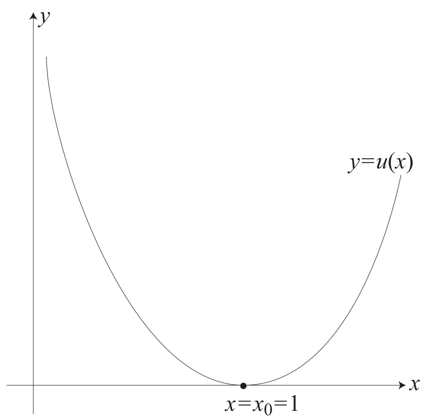
より, $u(x)$ は (4.6) を満たす x_0 において極小かつ最小.

ここで, $u(1)=0$ に注意すれば最小値を与える x_0 に関して,

$$x_0 = 1 \iff \log a = 1 \iff a = \mathbf{e} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

が成り立つことが (4.1) 成立のための**必要十分条件**である (**下図**).

以上より, 題意を成立させるための条件は $a=\mathbf{e}$ である.



[Note]　$a>1$ の場合; $u(1)=0$ を用いずに a の条件を求める;
$u(x)$ は $x=\dfrac{1}{\log a}$ で極小かつ最小となるので,

$$u(x) \geq u\left(\frac{1}{\log a}\right) = \frac{1}{\log a} - \log_a\left(\frac{1}{\log a}\right) - 1 = \frac{1}{\log a} + \frac{\log(\log a)}{\log a} - 1 \overset{\text{put}}{=} v(a) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

$v(a)$ を微分して,

$$v'(a) = -\frac{1}{a(\log a)^2} + \frac{\dfrac{1}{a\log a} \times \log a - \log(\log a) \times \dfrac{1}{a}}{(\log a)^2} = -\frac{\log(\log a)}{a(\log a)^2} \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

(4.9) により, $v(a)$ は $a=\mathbf{e}$ において極大かつ最大. 即ち,

$$v(a) \leq v(\mathbf{e}) = \frac{1}{\log \mathbf{e}} + \frac{\log(\log \mathbf{e})}{\log \mathbf{e}} - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.8), (4.10) により, $a>1$ の下で,

$$u(x) \geq 0 \quad (\forall x > 0) \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

が成り立つための a に関する必要十分条件は, $a=\mathbf{e}$ である.