【2.1】

t の関数

$$f(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - t\sin x|\,\mathbf{d}x$$

に対して，$t>0$ における $f(t)$ の最小値を与える t の値を求めよ．
更に，その最小値を求めよ．

【解答】

$0<x\leq \pi/2$ のとき，

$$f(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,|\cot x - t\,|\,\mathbf{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,|\cot x-\cot y|\,\mathbf{d}x \overset{\text{put}}{=} g(y)\quad \left(\because\ t=\cot y\right) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

このとき，y の関数 $g(y)$ は，

$$\int_0^{y_0}\sin x\,\mathbf{d}x=\int_{y_0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathbf{d}x \iff \cos y_0=\frac{1}{2} \iff y_0=\frac{\pi}{3} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

を満たす $y=y_0$ において最小値をとるので，t の関数 $f(t)$ は，

$$t=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

において最小値をとる．
実際，開区間 $(a,\,b)$ 内の単調減少関数 u と正値関数 v に対して，

$$\begin{aligned}
g(y)&=\int_a^b v(x)\big|u(x)-u(y)\big|\,\mathbf{d}x\\
&=\int_a^y v(x)\big\{u(x)-u(y)\big\}\,\mathbf{d}x-\int_y^b v(x)\big\{u(x)-u(y)\big\}\,\mathbf{d}x \quad \left(\because\ \text{Fig.1}\right)\\
&=\int_a^y v(x)u(x)\,\mathbf{d}x-u(y)\times\int_a^y v(x)\,\mathbf{d}x+\int_b^y v(x)u(x)\,\mathbf{d}x-u(y)\times\int_b^y v(x)\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(1.4)
\end{aligned}$$

$g(y)$ を y で微分して，

$$\begin{aligned}
g'(y)&=v(y)u(y)-u'(y)\times\int_a^y v(x)\,\mathbf{d}x-u(y)\times v(y)+v(y)u(y)-u'(y)\times\int_b^y v(x)\,\mathbf{d}x-u(y)\times v(y)\\
&=-u'(y)\left\{\int_a^y v(x)\,\mathbf{d}x-\int_y^b v(x)\,\mathbf{d}x\right\}\\
&=-u'(y)\left\{2\times\int_a^y v(x)\,\mathbf{d}x-\int_a^b v(x)\,\mathbf{d}x\right\} \quad \left(\because\ \text{Fig.2}\right) \qquad \cdots\cdots(1.5)
\end{aligned}$$

(1.5) において，$-u'(y)>0$ $(a<y<b)$ を考慮すれば，導関数 $g'(y)$ は，

$$\int_a^{y_0} v(x)\,\mathbf{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b v(x)\,\mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

を満たす $y=y_0$ でその符号を負から正に変える．

何故なら，面積関数

$$S(y)=\int_a^y v(x)\ \mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

は，$[a,\ b]$ において連続かつ単調増加であるから，**中間値の定理**により，(1.6) を満たす y_0 が存在する．
従って，$g(y)$ は

$$\int_a^{y_0} v(x)\ \mathbf{d}x=\int_{y_0}^{b} v(x)\ \mathbf{d}x \qquad \cdots\cdots(1.8)$$

を満たす y_0 において極小かつ最小となる．
以上の議論により，$f(t)$ の最小値は,

$$f(t_0)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\cos x-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\right\}\mathbf{d}x-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\cos x-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\right\}\mathbf{d}x \quad \left(t_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

で与えられ,

$$w(x)=\sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x \qquad \cdots\cdots(1.10)$$

と表せば,

$$f(t_0)=\Big[w(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\Big[w(x)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=2w\left(\frac{\pi}{3}\right)-w\left(\frac{\pi}{2}\right)-w(0) \qquad \cdots\cdots(1.11)$$

ここで,

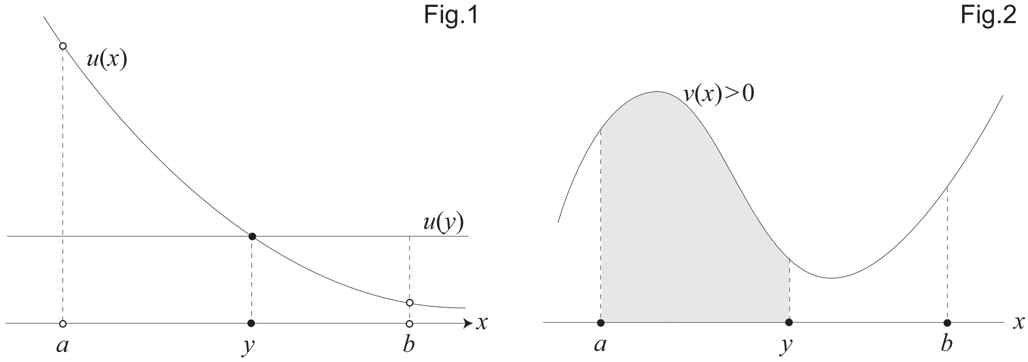
$$w(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \wedge\ w\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\ \wedge\ w\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(1.12)$$

であるから,

$$f(t_0)=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\sqrt{3}-1 \qquad \cdots\cdots(1.13)$$

Fig.1

Fig.2



【2.2】

半径 10 の円 $\mathfrak{C}$ に半径 3 の円 $\mathfrak{C}'$ が内接しながら滑ることなく回転する．内接円 $\mathfrak{C}'$ 上の点 P が円 $\mathfrak{C}$ に接してから再び接するまでに描く曲線は円 $\mathfrak{C}$ を 2 つの領域に分割する．このとき，それぞれの領域の面積を求めよ．

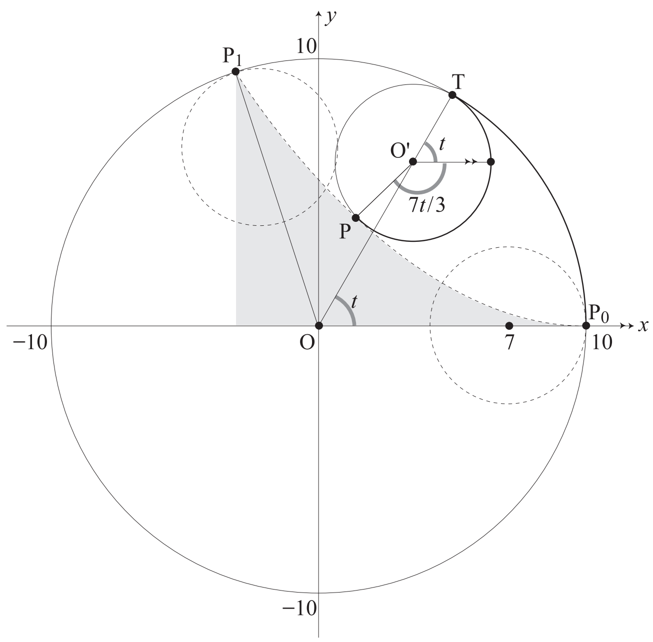
【解答】

$\mathfrak{C}$ の中心を原点にとり，P の初期位置を $\mathrm{P}_0(10,\ 0)$ にとる．更に，$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ の接点を T と表し，$\angle \mathrm{TOP}_0 = t$ とする．また，$\mathfrak{C}'$ の中心を O′ と表す．このとき，

$$\mathrm{O}'(7\cos t,\ 7\sin t) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

更に，$\overset{\frown}{\mathrm{P_0T}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ より，$\angle \mathrm{TO'P} = \dfrac{10t}{3}$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}} \\ &= \begin{pmatrix} 7\cos t \\ 7\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cos(-7t/3) \\ 3\sin(-7t/3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7\cos t + 3\cos(7t/3) \\ 7\sin t - 3\sin(7t/3) \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(2.2)\end{aligned}$$



ここで，P が再び $\mathfrak{C}$ と接するのは，

$$\left(\angle \mathrm{TO'P} =\right) \frac{10t}{3} = 2\pi \iff t = \frac{3\pi}{5} \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

であるから，P の軌跡は，

$$x = 7\cos 3\tau + 3\cos 7\tau,\quad y = 7\sin 3\tau - 3\sin 7\tau \quad \left(0 \le \tau \le \frac{\pi}{5} \wedge \tau = \frac{t}{3}\right) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

(2.4) より，

$$\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)} = -\frac{\cos 3\tau - \cos 7\tau}{\sin 3\tau + \sin 7\tau} = -\frac{-2\sin 5\tau \cdot \sin(-2\tau)}{2\sin 5\tau \cdot \cos(-2\tau)} = -\tan 2\tau < 0 \quad \left(\because 0 \le 2\tau \le \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) により，(2.4) は**図**の点 $\mathrm{P}_1\big(10\cos(3\pi/5),\ 10\sin(3\pi/5)\big)$ から点 $\mathrm{P}_0(10,\ 0)$ まで単調に減少する．
そこで，(2.4) と x 軸の囲む領域 (**影付部**) の面積を S_0 と表せば，

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_{\frac{\pi}{5}}^{0} y(\tau)\,\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}\tau}\,\mathbf{d}\tau = \int_{\frac{\pi}{5}}^{0} (7\sin 3\tau - 3\sin 7\tau)(-21)(\sin 3\tau + \sin 7\tau)\,\mathbf{d}\tau \\ &= 21 \times \int_0^{\frac{\pi}{5}} \left(7\sin^2 3\tau + 4\sin 3\tau \sin 7\tau - 3\sin^2 7\tau\right)\mathbf{d}\tau \\ &= 21\times 7\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{1-\cos 6\tau}{2}\,\mathbf{d}\tau + 21\times 4\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{\cos 4\tau - \cos 10\tau}{2}\,\mathbf{d}\tau - 21\times 3\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{1-\cos 14\tau}{2}\,\mathbf{d}\tau \\ &= \frac{42\pi}{5} + 25\sin\frac{\pi}{5} \qquad \cdots\cdots(2.6)\end{aligned}$$

一方，$\mathfrak{C}$ 上の弧 $\mathrm{P_0P_1}$ と x 軸の囲む領域は，(**扇形**) + (**直角三角形**) であり，
その面積 S は，

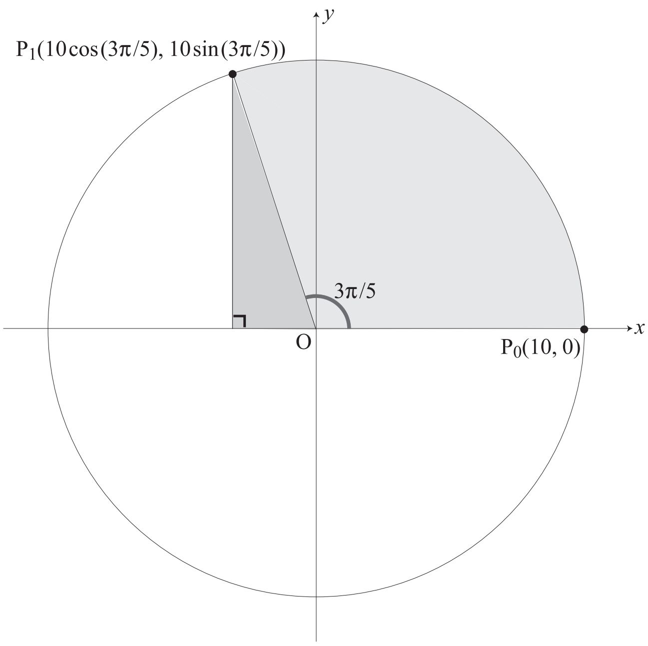
$$S = \frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{3\pi}{5} + \frac{1}{2} \times 10 \sin \frac{3\pi}{5} \left(-10 \cos \frac{3\pi}{5} \right) = 30\pi + 25 \sin \frac{\pi}{5} \qquad \cdots\cdots (2.7)$$

(2.6), (2.7) より，面積の一方を S_1 と表せば，

$$S_1 = S - S_0 = \left(30\pi + 25 \sin \frac{\pi}{5} \right) - \left(\frac{42\pi}{5} + 25 \sin \frac{\pi}{5} \right) = \frac{108\pi}{5} \qquad \cdots\cdots (2.8)$$

更に，面積の他方を S_2 と表せば，

$$S_2 = 10^2\pi - S_1 = \frac{392\pi}{5} \qquad \cdots\cdots (2.9)$$



【2.3】

$x > \dfrac{1}{3}$ に対して，

$$\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}+\cdots+\frac{1}{n\log n}\geq x$$

を満たす最小の正整数 n を N_x で表す．

このとき，

$$\mathbf{e}^x\log 2\leq \log \mathrm{N}_x\leq \mathbf{e}^x\log 3$$

が成り立つことを示せ．

【解答】

題意より，実数 $x > \dfrac{1}{3}$ は

$$\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{N}_x\log \mathrm{N}_x}\geq x>\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{(\mathrm{N}_x-1)\log(\mathrm{N}_x-1)} \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

を満たす．

ここで，$u(x)=\dfrac{1}{x\log x}$ と置けば，

$$u'(x)=-\frac{1+\log x}{(x\log x)^2}<0 \ \wedge \ x>1 \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

このとき，Fig.1 における面積比較により，

$$\sum_{k=3}^{\mathrm{N}_x}\frac{1}{k\log k}<\int_2^{\mathrm{N}_x}\frac{1}{x\log x}\,\mathbf{d}x=\int_{\log 2}^{\log \mathrm{N}_x}\frac{\mathbf{d}\tau}{\tau}=\log\frac{\log \mathrm{N}_x}{\log 2}$$

$$\therefore \quad \log\frac{\log \mathrm{N}_x}{\log 2}>x \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

同様に，Fig.2 における面積比較により，

$$\sum_{k=3}^{\mathrm{N}_x-1}\frac{1}{k\log k}>\int_3^{\mathrm{N}_x}\frac{1}{x\log x}\,\mathbf{d}x=\log\frac{\log \mathrm{N}_x}{\log 3}$$

$$\therefore \quad \log\frac{\log \mathrm{N}_x}{\log 3}<x \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

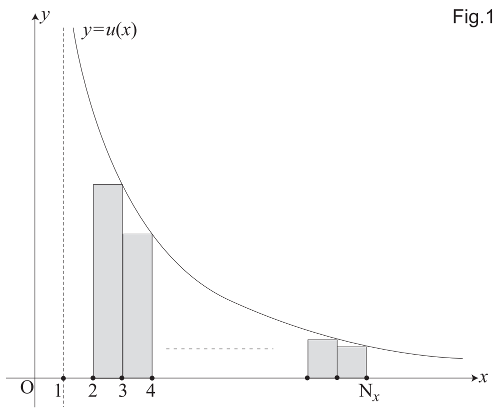


Fig.1

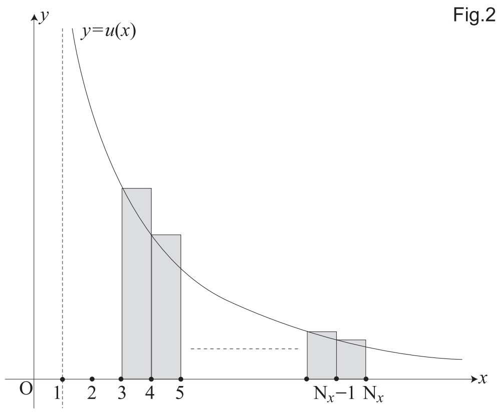


Fig.2

(3.3), (3.4) により，

$$\log\frac{\log \mathrm{N}_x}{\log 2}>x>\log\frac{\log \mathrm{N}_x}{\log 3}$$

$$\iff \frac{\log \mathrm{N}_x}{\log 2}>\mathbf{e}^x>\frac{\log \mathrm{N}_x}{\log 3}$$

$$\iff \mathbf{e}^x\log 2<\log \mathrm{N}_x<\mathbf{e}^x\log 3 \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) により，

$$\mathbf{e}^x\log 2\leq \log \mathrm{N}_x\leq \mathbf{e}^x\log 3 \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

【2.4】

xy 平面上の曲線

$$\mathfrak{C} : x = t - \sin t,\ \ y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

上に糸が張り付いており，これを (0, 0) の点を持って弛むことなく剥がしていく．
糸が点 $\mathrm{P}(\alpha - \sin\alpha, 1 - \cos\alpha)$ で曲線 $\mathfrak{C}$ から離れているとき，持っている糸の端点を Q とする．

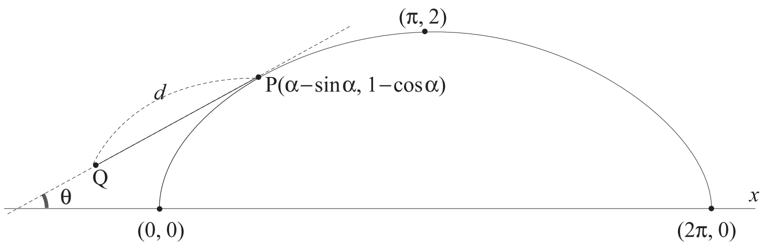
(1) 原点から P までの曲線 $\mathfrak{C}$ の長さを α を用いて表せ．

(2) $0 < \alpha < 2\pi$ のとき，直線 PQ に向かって x 軸の正の方向から測った角を θ とするとき，

$$\theta = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

であることを示せ．ただし，$-\pi/2 < \theta < \pi/2$ とする．

(3) $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ の範囲で α が動くとき，線分 PQ の通過する領域の面積を求めよ．



【解答】

(1) O, P 間の $\mathfrak{C}$ の弧長は，線分 PQ の長さ d に等しい．

$$\therefore\ \ d = \int_0^\alpha \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\ \mathbf{d}t = \int_0^\alpha \sqrt{2(1 - \cos t)}\ \mathbf{d}t = \int_0^\alpha \sqrt{4\sin^2(t/2)}\ \mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

ここで，$0 < \alpha < 2\pi$ と考えてよいので，

$$d = \int_0^\alpha 2\left|\sin(t/2)\right|\ \mathbf{d}t = 2 \times \int_0^\alpha \sin(t/2)\ \mathbf{d}t = 4\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

(2) P における $\mathfrak{C}$ の接線の傾きは，$\tan\theta$

一方，$\mathfrak{C}$ の $t = \alpha$ における接線方向のベクトルは，

$$\begin{pmatrix} \{t - \sin t\}' \\ \{1 - \cos t\}' \end{pmatrix}_{t=\alpha} = \begin{pmatrix} 1 - \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

従って，

$$\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\sin^2(\alpha/2)} = \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha/2)}{\cos(\pi/2 - \alpha/2)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

ここで，

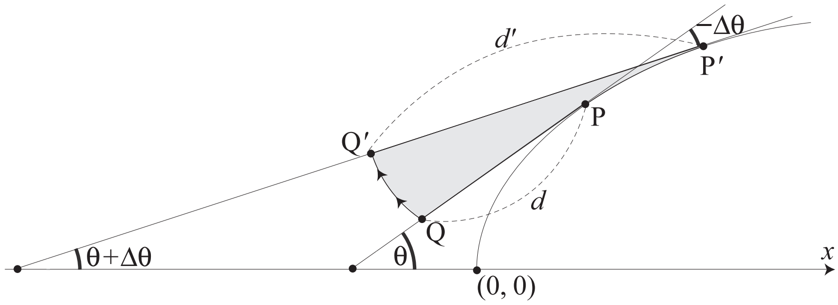
$$0 < \alpha < 2\pi \iff -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi - \alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

更に題意より，

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

ここで，$\tan x$ は $-\pi/2 < x < \pi/2$ において単調 (増加) であるから，
(4.4), (4.5), (4.6) より，

$$\theta = \frac{\pi - \alpha}{2} \qquad \cdots\cdots(4.7)$$



(3) 接点が $\mathrm{P}: t=\alpha$ から $\mathrm{P}': t=\alpha+\triangle\alpha$ へと移動したときの接線の方向角の変化を $\theta\to\theta+\triangle\theta$ で表す．ここで，$\triangle\theta<0$ に注意する．この接点の移動に伴う線分 $\mathrm{PQ}\to\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ の通過領域の面積を $\triangle S$ で表せば，$\overline{\mathrm{PQ}}=d$, $\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}=d'$ として，

$$\frac{1}{2}d^2(-\triangle\theta)\leq\triangle S\leq\frac{1}{2}(d')^2(-\triangle\theta) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

(1) より，

$$d=4\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=4\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=4(1-\sin\theta) \qquad \cdots\cdots(4.9)$$

であるから，

$$d'=4\big(1-\sin(\theta+\triangle\theta)\big)=4\big(1-\sin\theta\cos(\triangle\theta)-\cos\theta\sin(\triangle\theta)\big) \qquad \cdots\cdots(4.10)$$

(4.8) において $\triangle\theta\to0$ とすると，(4.9), (4.10) により**ハサミウチの原理**から，

$$\lim_{\triangle\theta\to0}\frac{\triangle S}{\triangle\theta}=-\frac{1}{2}d^2 \iff \frac{\mathbf{d}S}{\mathbf{d}\theta}=-8(1-\sin\theta)^2 \qquad \cdots\cdots(4.11)$$

求める面積は，(4.11) の両辺を $[-\pi/2,\ \pi/2]$ で積分して，

$$-8\times\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^2\,\mathbf{d}\theta=8\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin\theta+\sin^2\theta)\,\mathbf{d}\theta$$

$$=16\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)\mathbf{d}\theta=16\left[\frac{3}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=12\pi \qquad \cdots\cdots(4.12)$$

[Note]

$\mathrm{P}(\alpha-\sin\alpha,\ 1-\cos\alpha)$ に対応する Q の座標は，

$$\begin{cases} x=\alpha+\sin\alpha-4\sin\dfrac{\alpha}{2} \\ y=3+\cos\alpha-4\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4.13)$$

で与えられることを確認せよ．

また，題意の面積は，

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi}y_{\mathrm{Q}}\,\mathbf{d}x_{\mathrm{Q}}-\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi}y_{\mathrm{P}}\,\mathbf{d}x_{\mathrm{P}} \qquad \cdots\cdots(4.14)$$

でも求められることを確認せよ．