【3.1】

xy 平面上の曲線

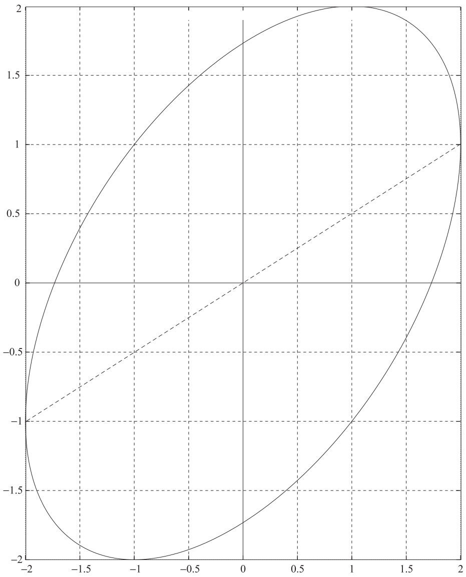
$$\mathfrak{C}: x^2 - xy + y^2 = 3 \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

の囲む領域を $\mathfrak{D}$ とする.

(1) $\mathfrak{C}$ を原点中心に右回りに 45° 回転した曲線 $\mathfrak{C}'$ の方程式を求めよ.

(2) $\mathfrak{D}$ の $x \geq 0$ の部分を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ.

【解答】



(1) $\mathfrak{C}$ 上の点を (x, y), $\mathfrak{C}'$ 上の点を (x', y') で表す.

題意より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

(1.2) を (1.1) に代入して,

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \times \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 = 3$$

$$\iff \frac{(x')^2}{6} + \frac{(y')^2}{2} = 1 \quad \cdots\cdots(1.3)$$

(2) 方程式 (1.1) を y について解いて,

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \iff y = \frac{x \pm \sqrt{12 - 3x^2}}{2} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

楕円 $\mathfrak{C}$ の領域 $y \geq x/2$ の部分を y_1, 領域 $y \leq x/2$ の部分を y_2 で表せば,

$$y_1 = \frac{x + \sqrt{3}\sqrt{4 - x^2}}{2} \ \wedge \ y_2 = \frac{x - \sqrt{3}\sqrt{4 - x^2}}{2} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

更に,

$$y_1 = y_2 \iff x = \pm 2 \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

従って, 求める体積は,

$$2\pi \times \int_0^2 x(y_1 - y_2)\,\mathbf{d}x = 2\sqrt{3}\pi \times \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\,\mathbf{d}x = \sqrt{3}\pi \times \int_0^4 t^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{d}t = \sqrt{3}\pi\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

【3.2】

xyz 空間において，yz 平面上の双曲線

$$2y^2 - z^2 = 2 \ \wedge \ x = 0 \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を z 軸の周りに回転してできる曲面 $\mathfrak{S}$ と 2 つの平面

$$z = y+1, \quad z = y-1 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

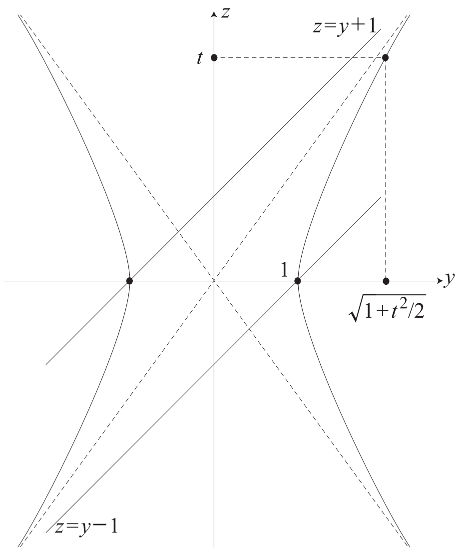
によって囲まれる立体図形を $\mathfrak{K}$ とする．

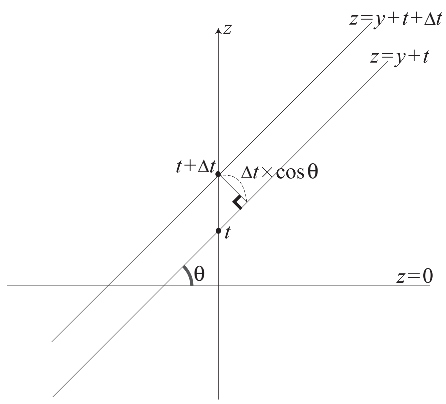
(1) 曲面 $\mathfrak{S}$ の方程式を求めよ．

(2) 平面 $\pi : z = y+t \ (-1 \leq t \leq 1)$ による切口の図形の面積を求めよ．

(3) $\mathfrak{K}$ の体積を求めよ．

【解答】





(1) 双曲線 (2.1) と直線 $z = t \wedge x = 0$ との交点は，

$$\left(0,\ \sqrt{1+t^2/2},\ t\right)$$

であるから，回転双曲面 $\mathfrak{S}$ と平面 $z = t$ との交円は，
平面 $z = t$ と円柱面 $x^2 + y^2 = 1 + t^2/2$ との交円である．
この 2 式から t を消去して，

$$\mathfrak{S} : x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{2}z^2 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

(2) 回転曲面 $\mathfrak{S}$ の平面 $z = y+t$ による切口の楕円を xy 平面に正射影した楕円を平面 $z = 0$ との切口とする楕円柱面の方程式は，(2.3) に $z = y+t$ を代入して，

$$\frac{x^2}{1+t^2} + \frac{(y-t)^2}{2(1+t^2)} = 1 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

円柱面 (2.4) の平面 $z = 0$ による切口の楕円の面積は，

$$\sqrt{1+t^2} \times \sqrt{2(1+t^2)}\,\pi = \sqrt{2}\left(1+t^2\right)\pi \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

また，平面 $z = 0$, $z = y+t$ のなす角 $\theta \ (0 \leq \theta \leq \pi/2)$ に対して，

$$\cos\theta = \frac{\left|(0,\ 0,\ 1)\cdot(0,\ 1,\ -1)\right|}{\left|(0,\ 0,\ 1)\right| \times \left|(0,\ 1,\ -1)\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

が成り立つので，求める面積は，

$$\sqrt{2}\left(1+t^2\right)\pi \times \frac{1}{\cos\theta} = 2\left(1+t^2\right)\pi \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(3) (2.6), (2.7) により，求める体積は，

$$\int_{-1}^{1} 2\left(1+t^2\right)\pi \cdot \cos\theta \, \mathbf{d}t = 2\sqrt{2}\pi\left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

【3.3】

空間内の 3 点

$$\mathrm{A}(0,\,0\,1),\quad \mathrm{B}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right),\quad \mathrm{C}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)$$

を頂点とする三角形の内接円を $\mathfrak{D}_1$, 外接円を $\mathfrak{D}_2$ とする.

$\mathfrak{D}_1$ の外部にあり, $\mathfrak{D}_2$ の内部にある領域を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ.

【解答】

3 点 A, B, C は球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上にあるので, 外接円 $\mathfrak{D}_2$ は, この球面と平面 $z=1-\sqrt{2}x$ との交円と考えられ,(Fig.1) この 2 図形を平面 $x=t$ で切った切断面の図形は Fig.3 である. Fig.3 における線分 (球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と平面 $z=1-\sqrt{2}x$ との交円を平面 $x=t$ で切った切口の 2 点を結ぶ線分) を点 $(t,\,0,\,0)$ の周りに回転して得られる円環領域の面積は,

$$\pi\big((1-t^2)-(1-\sqrt{2}t)^2\big)=\pi\big(2\sqrt{2}t-3t^2\big)\qquad\cdots\cdots(3.1)$$

この線分が存在する t の値の範囲は,

$$\sqrt{1-t^2}\geq\left|1-\sqrt{2}t\right|\iff 2\sqrt{2}t-3t^2\geq 0\qquad\cdots\cdots(3.2)$$

従って, $\mathfrak{D}_2$ を回転して得られる立体の体積 V_{out} は,

$$\begin{aligned}V_{out}&=\pi\int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\big(2\sqrt{2}t-3t^2\big)\,\mathbf{d}t\\&=-\frac{1}{6}\times(-3\pi)\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3=\frac{8\sqrt{2}\pi}{27}\qquad\cdots\cdots(3.3)\end{aligned}$$

Fig.1 より, $\mathfrak{D}_1$ は球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{2}$ と平面 $z=1-\sqrt{2}x$ との交円と考えられるので, 交円 $\mathfrak{D}_1$ の平面 $x=t$ による切口の線分を点 $(t,\,0,\,0)$ の周りに回転して得られる円環領域の面積は,

$$\pi\left(\left(\frac{1}{2}-t^2\right)-\left(1-\sqrt{2}t\right)^2\right)=\pi\left(-3t^2+2\sqrt{2}t-\frac{1}{2}\right)\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

この切口の線分が存在する t の値の範囲は,

$$\sqrt{\frac{1}{2}-t^2}\geq\left|1-\sqrt{2}t\right|\iff -3t^2+2\sqrt{2}t-\frac{1}{2}\geq 0\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

従って, $\mathfrak{D}_1$ を回転して得られる立体の体積 V_{in} は,

$$V_{in}=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{6}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(-3t^2+2\sqrt{2}t-\frac{1}{2}\right)\mathbf{d}t=\frac{\sqrt{2}\pi}{27}\qquad\cdots\cdots(3.6)$$

(3.3), (3.6) により求める体積は,

$$\frac{8\sqrt{2}\pi}{27}-\frac{\sqrt{2}\pi}{27}=\frac{7\sqrt{2}\pi}{27}\qquad\cdots\cdots(3.7)$$

Fig.1

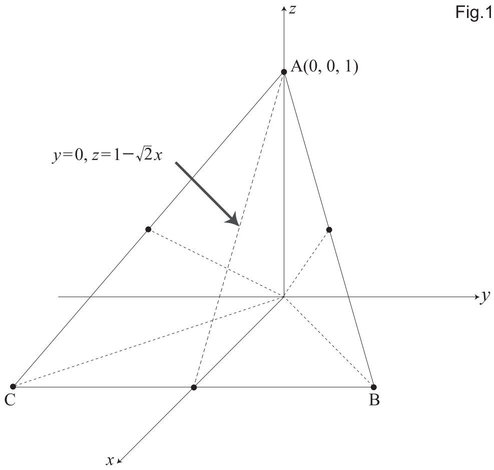


Fig.2

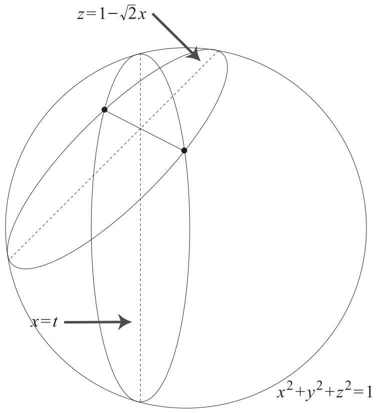
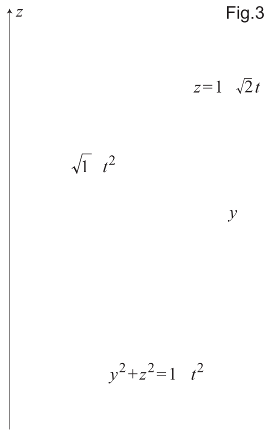


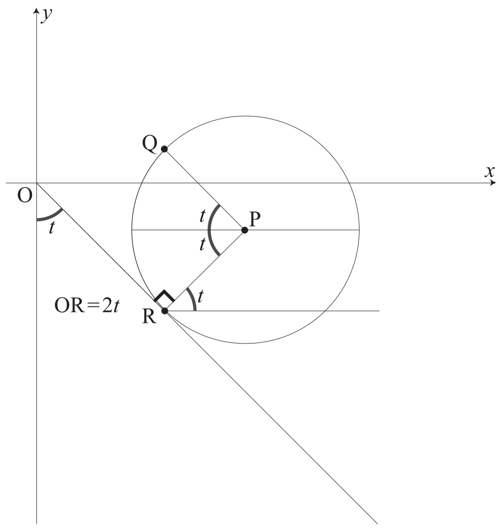
Fig.3



【3.4】

原点 O を中心として回転する半直線 $\mathfrak{L}$ と $\mathfrak{L}$ に接しながら動く半径 1 の円 $\mathfrak{C}$ がある．
時刻 $t=0$ において，$\mathfrak{L}$ は y 軸の負の部分に一致しており，$\mathfrak{C}$ は中心が $(1,\ 0)$ にあって，原点で $\mathfrak{L}$ に接している．
時刻 t において，$\mathfrak{L}$ は原点中心に正の向きに角 t だけ回転し，$\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{L}$ 上を滑らずに転がり，原点から $2t$ の距離の点 R で $\mathfrak{L}$ に接している．$\mathfrak{C}$ の中心を P とする．点 Q は $\mathfrak{C}$ の周上の定点で $t=0$ において原点にあるものとする．
(1) 時刻 t における 2 点 P, Q の座標を t の式で表せ．
(2) $0 \leq t \leq \pi/2$ における P の軌跡を $\mathfrak{K}_1$，Q の軌跡を $\mathfrak{K}_2$ とする．
2 点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$ を結ぶ線分，2 点 $(\pi,\ 1)$, $(\pi,\ 2)$ を結ぶ線分および $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

【解答】



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が x 軸の正方向とのなす角は $-\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$ であり，
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = 2t$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 2t\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= (2t\sin t,\ -2t\cos t) \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ が x 軸の正方向とのなす角は t であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = (\cos t,\ \sin t) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

(4.1), (4.2) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{RP}} = (2t\sin t + \cos t,\ -2t\cos t + \sin t) \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

次に，$\mathrm{OR}=2t$ であるから RQ の弧長も $2t$ であり，$\angle\mathrm{RPQ}=2t$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \big(\cos(\pi-t),\ \sin(\pi-t)\big) = (-\cos t,\ \sin t) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

(4.3), (4.4) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (2t\sin t,\ -2t\cos t + 2\sin t) \qquad \cdots\cdots(4.5)$$

(4.3), (4.5) より，

$$\mathrm{P}(2t\sin t + \cos t,\ -2t\cos t + \sin t), \quad \mathrm{Q}(2t\sin t,\ -2t\cos t + 2\sin t) \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

(2) Q の軌跡 $\mathfrak{K}_2$ について;
$0 < t < \pi/2$ において，

$$\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} = 2(\sin t + t\cos t) > 0 \ \wedge\ \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}t} = 2t\sin t > 0 \qquad \cdots\cdots(4.7)$$

より，$\mathfrak{K}_2$ は原点から点 $(\pi,\ 2)$ まで単調増加．
P の軌跡 $\mathfrak{K}_1$ について;
$0 < t < \pi/2$ において，

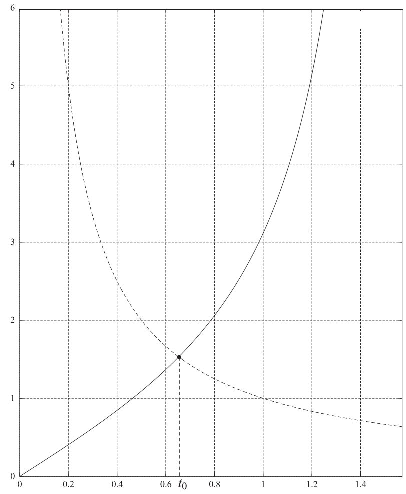
$$\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} = 2t\cos t + \sin t > 0 \ \wedge\ \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}t} = t\cos t\left(2\tan t - \frac{1}{t}\right) \qquad \cdots\cdots(4.8)$$

ここで，2 曲線 $2\tan t$, $1/t$ のグラフを考慮すれば，
$\mathbf{d}y/\mathbf{d}x$ は $0 < t < \pi/2$ 内のある t_0 でその符号を負から正に変える．**(次頁上図)**

従って，$\mathfrak{K}_1$ は点 $(1,\ 0)$ から極小点

$$\mathrm{M}(2t_0 \sin t_0 + \cos t_0,\ -2t_0 \cos t_0 + \sin t_0)$$

まで単調減少，M から点 $(\pi,\ 1)$ まで単調増加.
以上より，$\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ の囲む領域は**下図**であり，その面積は,



$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} y_{\mathrm{Q}}\ \mathbf{d}x - \int_1^{\pi} y_{\mathrm{P}}\ \mathbf{d}x \\
&\qquad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2t\ \cos t + 2\sin t)\cdot 2(t\ \cos t + \sin, t)\ \mathbf{d}t \\
&\qquad\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2t\ \cos t + \sin t)(\sin t + 2t\ \cos t)\ \mathbf{d}t \\
&\qquad\qquad = 3 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ \mathbf{d}t = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \qquad \cdots\cdots(4.9)
\end{aligned}$$