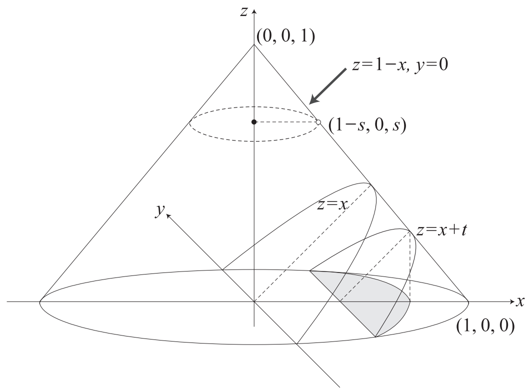
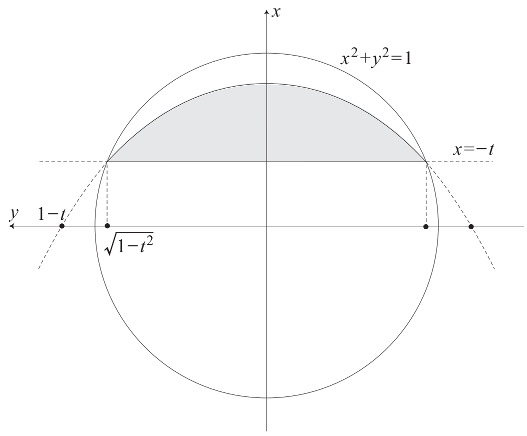
【4.1】

xyz 空間において，円領域 $x^2+y^2 \leq 1,\ z=0$ を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐の内部および表面上の点を合わせた立体を考える．この立体を平面 $z=x$ で切って 2 つの部分に分けるとき，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を含む側の部分の体積を求めよ．

【解答】





平面 $z=s\ (0 \leq s \leq 1)$ による題意の円錐の切口の円の半径は $1-s$ であるから，切口の円周上の点 $(x,\ y,\ z)$ は，

$$x^2+y^2=(1-s)^2 \ \wedge\ z=s \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

を同時に満たし，両式から s を消去した，

$$x^2+y^2=(z-1)^2 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

が円錐曲面の方程式を与える．

次に，平面 $z=x+t\ (-1 \leq t \leq 0)$ による円錐曲面 (1.2) の切口の放物線上の任意の点 $(x,\ y,\ z)$ は，

$$x^2+y^2=(z-1)^2 \ \wedge\ z=x+t \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

を同時に満たし，両式から z を消去した，

$$x^2+y^2=(x+t-1)^2$$

$$\iff\ x=-\frac{1}{2(1-t)}y^2+\frac{1-t}{2} \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

は放物線 (1.3) を含む放物柱面の方程式を与えるので，

放物線 (1.3) を xy 平面に正射影した放物線の方程式は，

$$x=-\frac{1}{2(1-t)}y^2+\frac{1-t}{2} \ \wedge\ z=0 \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

と表される．ただし，$-1 \leq t \leq 0$ であることに注意する．

このとき，放物線 (1.5) と xy 平面上の直線 $x=-t\ \wedge\ z=0$ との交点は，$y=\pm\sqrt{1-t^2}$ であるから，2 つの図形の囲む領域の面積，即ち，平面 $z=x+t$ による円錐曲面の切口の図形を xy 平面へ正射影した図形の面積 S' は，

$$S'=-\frac{1}{2(1-t)}\times\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2\sqrt{1-t^2}\right)^3=\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1-t^2} \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

で与えられるので，2 平面 $z=0,\ z=x+t$ のなす角を θ として，求める体積は，

$$\int_{-1}^{0}\frac{S'}{\cos\theta}\times\cos\theta\ \mathbf{d}t=\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\sqrt{1-t^2}\ \mathbf{d}t-\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}(-2t)\sqrt{1-t^2}\ \mathbf{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\sqrt{u}\ \mathbf{d}u=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

【4.2】

xyz 空間において，

$$x^2+y^2 \leq r^2, \quad y^2+z^2 \geq r^2, \quad z^2+x^2 \leq r^2 \quad (r>0) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ．

【解答】

題意の立体の対称性から，

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

の部分の体積を求めて，それを 8 倍すればよい．

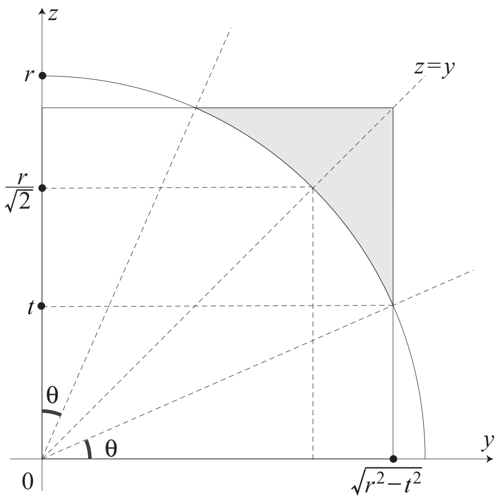
領域 (2.1) を平面 $x=t$ で切った切口の図形

$$y^2 \leq r^2-t^2,\ z^2 \leq r^2-t^2,\ y^2+z^2 \geq r^2$$

$$\iff\ 0 \leq y \leq \sqrt{r^2-t^2},\ 0 \leq z \leq \sqrt{r^2-t^2},\ y^2+z^2 \geq r^2 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

を yz 平面に正射影した図形は**右図**で与えられるから，

切口の図形 (**影付部分**) の存在範囲は，



$$\frac{r}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{r^2-t^2} \iff (0 \leq)\ t \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

従って，図の領域の面積は，

$$\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}\times t\times\sqrt{r^2-t^2}-\pi r^2\times\frac{\pi/2-2\theta}{2\pi} \iff r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}-\frac{\pi r^2}{4}+r^2\theta \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

(2.5) により，求める体積は，

$$8\times\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left((1-\pi/4)r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}+r^2\theta\right)\,\mathbf{d}t \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

ここで，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left((1-\pi/4)r^2-t^2\right)\,\mathbf{d}t=\left[\left(1-\frac{\pi}{4}\right)r^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}=\left(\frac{5}{6\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)r^3 \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

更に，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}t\sqrt{r^2-t^2}\,\mathbf{d}t=\left[-\frac{1}{3}\left(r^2-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)r^3 \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

また，$\sin\theta=\dfrac{t}{r}$ より，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}r^2\theta\,\mathbf{d}t=r^2\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\times r\cos\theta\,\mathbf{d}\theta=r^3\Big[\theta\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-r^3\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,\mathbf{d}\theta=\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)r^3 \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

(2.6), (2.7), (2.8), (2.9) により，求める体積は，

$$\left(8\sqrt{2}-\frac{32}{3}\right)r^3 \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

【4.3】

正四角錐 $\mathfrak{V}$ に対して，その底面上に中心を持ち，すべての辺と接する球 $\mathfrak{S}$ がある．
$\mathfrak{V}$ の底面の正方形の 1 辺の長さを $2a$ とするとき，次の各問いに答えよ．
(1) $\mathfrak{V}$ の高さを求めよ．　(2) $\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{V}$ の共通部分の体積を求めよ．

【解答】

(1) Fig.2 において，

$$\mathrm{OT}=a \ \wedge \ \mathrm{OA}=\sqrt{2}a \ \wedge \ \angle\mathrm{OTA}=90^\circ \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

(3.1) より，$\angle\mathrm{OAT}=45^\circ$ であるから，

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}=\sqrt{2}a \iff \mathrm{OP}=\sqrt{2}a \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

(2) Fig.3 において，

$$\mathrm{OM}=a,\ \mathrm{OP}=\sqrt{2}a,\ \mathrm{PM}=\sqrt{3}a \implies \mathrm{OM}:\mathrm{OP}:\mathrm{PM}=1:\sqrt{2}:\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

また，三角形 POM と三角形 OHM は相似であるから，

$$\mathrm{OH}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{OM}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a \qquad \cdots\cdots(3.4)$$

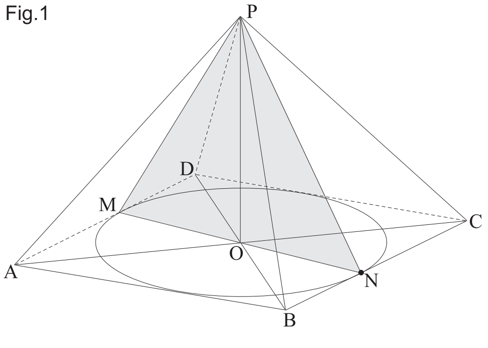
従って，正四角錐 $\mathfrak{V}$ からはみ出した球 $\mathfrak{S}$ の部分の体積は，Fig.4 により，

$$4\pi\int_{\sqrt{\frac{2}{3}}a}^{a}(a^2-x^2)\,\mathbf{d}x=\frac{4a^3\pi\left(18-7\sqrt{6}\right)}{27} \qquad \cdots\cdots(3.5)$$

(3.5) に より，求める共通部分の体積は，

$$\frac{4\pi a^3}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{4a^3\pi\left(18-7\sqrt{6}\right)}{27}=\frac{2\pi a^3\left(14\sqrt{6}-27\right)}{27} \qquad \cdots\cdots(3.6)$$

Fig.1



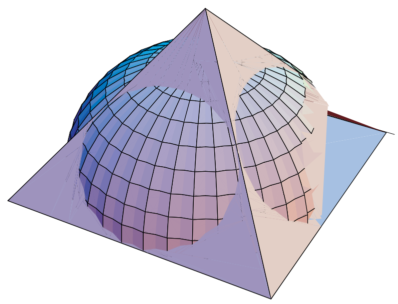


Fig.4

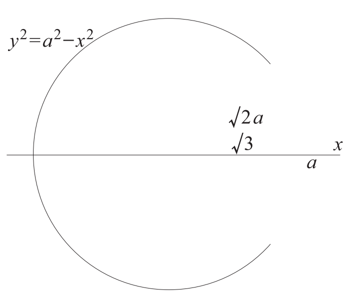


Fig.2

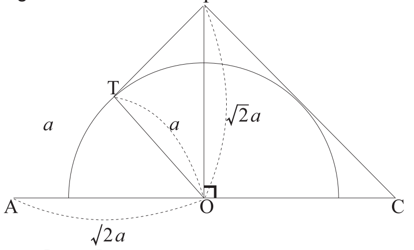
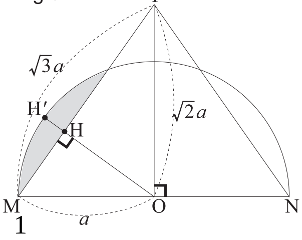


Fig.3



【4.4】

xyz 空間内に 5 点

$$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \ \mathrm{B}(-1,\ 1,\ 0),\ \ \mathrm{C}(-1,\ -1,\ 0)\ \ \mathrm{D}(1,\ -1,\ 0),\ \ \mathrm{P}(0,\ 0,\ 3)$$

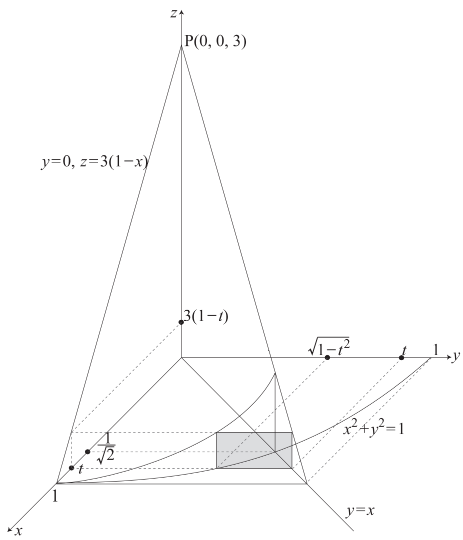
をとるとき，四角錘 PABCD の $x^2+y^2 \geq 1$ を満たす領域の体積を求めよ．

【解答】

題意の立体 (**下図**) の z 軸回転対称性から，
空間領域 $\mathfrak{D}: x \geq y \geq 0$ 内の体積を求めて 8 倍すればよい．
円柱の底面 $x^2+y^2=1,\ z=0$ と直線 $y=x,\ z=0$ との交点は，
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ であるから，$\mathfrak{D}$ 内の立体は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

の範囲に存在する．
また，$\mathrm{P}(0,\ 0,\ 3)$ と点 $(1,\ 0,\ 0)$ を結ぶ直線は，$y=0,\ z=3(1-x)$ で与えられ，この直線と平面 $x=t$ との交点は，$(t,\ 0,\ 3(1-t))$ で与えられるから，$\mathfrak{D}$ 内の立体の平面 $x=t$ による切口の長方形の縦，横の長さはそれぞれ $3(1-t),\ t-\sqrt{1-t^2}$ である．(**右図**)

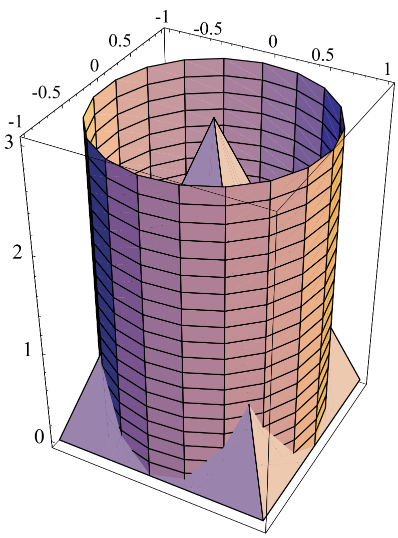


従って，求める体積は，

$$8 \times \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 3(1-t)\left(t-\sqrt{1-t^2}\right)\,\mathbf{d}t$$

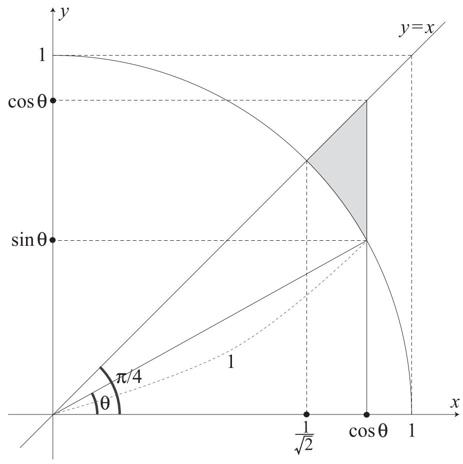
$$= 24 \times \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(t-t^2+t\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-t^2}\right)\mathbf{d}t = 24\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} - 24\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 4+4\sqrt{2}-3\pi \qquad \cdots\cdots(4.2)$$



【別解】

空間領域 $\mathfrak{D}: x \geq y \geq 0$ 内の立体の $z=$ (定数) なる平面による切口の図形について考える．このとき，平面 $z = 3(1-\cos\theta)$ による四角錐の側面 $z = 3(1-x)$ の切口の線分の x 座標は，**右図**のように $x = \cos\theta$ となるから，$\mathfrak{D}$ 内の立体の切口の面積は，



$$\frac{1}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta - 1^2\pi \times \frac{\pi/4-\theta}{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\theta \quad \cdots\cdots(4.3)$$

で与えられる．ここで，題意の立体の存在範囲は，

$$z: 0 \to 3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \cdots\cdots(4.4)$$

であるから，$\theta: 0 \to \pi/4$ と対応するので，

$$8 \times \int_0^{\frac{3\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\theta\right) \mathbf{d}z$$
$$= 8 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\theta\right) \times 3\sin\theta \, \mathbf{d}\theta = 4 + 4\sqrt{2} - 3\pi \quad \cdots\cdots(4.5)$$